



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{74 \cdot 3}{9 \cdot 37} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : 8 \\ &= \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16}{9} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16 : 8}{9} = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε  $x$  ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν  $200 - x$  ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε  $x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100}$

ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε  $(200 - x) \cdot \frac{150}{100}$  ευρώ. Συνολικά τα δύο

ραδιόφωνα πουλήθηκαν  $200 \cdot \frac{140}{100}$  ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{125x}{100} + (200 - x) \cdot \frac{150}{100} &= 200 \cdot \frac{140}{100} \Leftrightarrow 12,5x - 15x + 3000 = 2800 \\ &\Leftrightarrow 2,5x = 200 \Leftrightarrow x = 80. \end{aligned}$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και  $200 - 80 = 120$  ευρώ το ραδιόφωνο Β.

### Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

### Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:  
(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015} = 1 - \frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019} = 1 - \frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021} = 1 - \frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009} = 1 - \frac{1012}{2009}$$
$$\frac{1011}{2023} = 1 - \frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011} = 1 - \frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013} = 1 - \frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017} = 1 - \frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009} > \frac{1012}{2011} > \frac{1012}{2013} > \frac{1012}{2015} > \frac{1012}{2017} > \frac{1012}{2019} > \frac{1012}{2021} > \frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1 - \frac{1012}{2009} < 1 - \frac{1012}{2011} < 1 - \frac{1012}{2013} < 1 - \frac{1012}{2015} < 1 - \frac{1012}{2017} < 1 - \frac{1012}{2019} < 1 - \frac{1012}{2021} < 1 - \frac{1012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός  $\frac{1011}{2023}$  είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

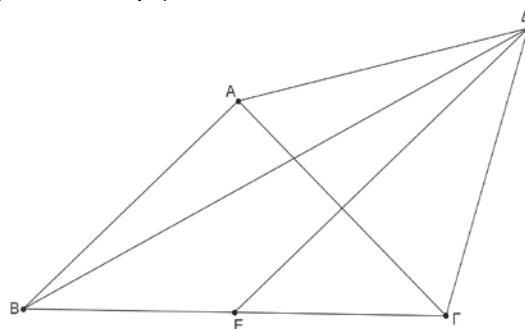
ενώ ο  $\frac{997}{2009}$  είναι ο μικρότερος.

### Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AB = AG$ . Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

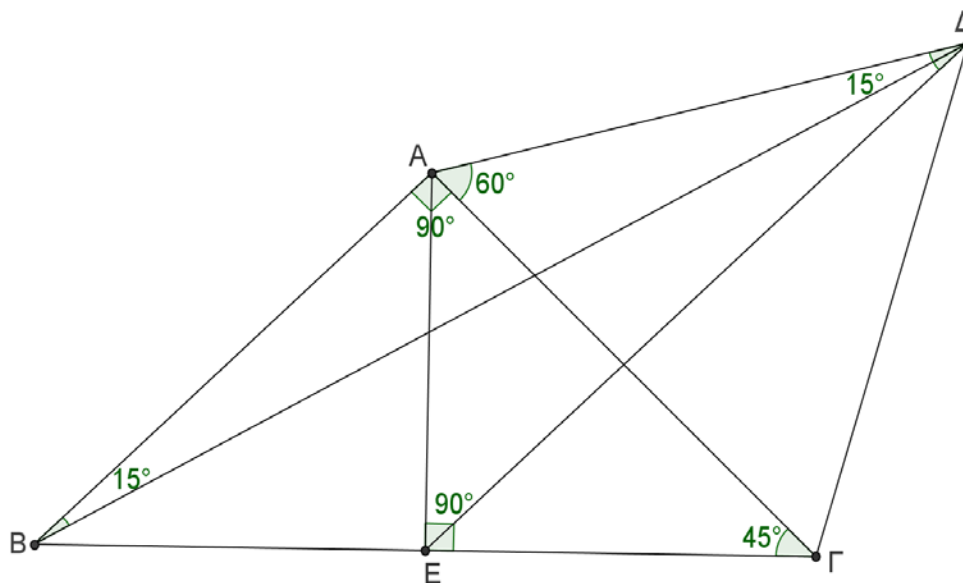
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία  $B\hat{A}E$ .



Σχήμα 1

### Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$  και η διάμεσός του  $AE$  είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο  $AEG$  είναι ορθογώνιο στο  $E$  με μία γωνία του  $45^\circ$ . Επομένως θα έχει  $E\hat{A}\Gamma = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ , οπότε αυτό είναι ισοσκελές με  $EA = EG$ .

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  έχουμε ότι:  $\Delta A = \Delta\Gamma$ . Επομένως τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  ισαπέχουν από τα άκρα  $A$  και  $\Gamma$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AG$ , οπότε η ευθεία  $DE$  είναι η μεσοκάθετη του  $AG$ .

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  λαμβάνουμε τις ισότητες  $AB = A\Gamma = A\Delta$ , οπότε το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  έχουμε  $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ , οπότε  $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ . Επειδή  $AB\Delta$  ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες  $AB$  και  $DE$  είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία  $AG$ , που τις τέμνει η ευθεία  $B\Delta$ , σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$B\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Delta = 15^\circ$$

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$ , αν  $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ .

#### Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για  $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$  λαμβάνουμε:

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256}{81} - 1}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε  $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ , οπότε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4 - 1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 + 1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256 \cdot 256 - 81 \cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256 + 81}{81}\right)\left(\frac{256 - 243}{81}\right)} - \frac{6}{13} \\ &= \frac{65536 - 6561}{81^2} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{81^2} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{337 \cdot 13} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{337 \cdot 13} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13. \end{aligned}$$

## Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το  $\frac{1}{3}$  από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

### Λύση

Έστω  $n$  το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι  $\frac{4n}{100}$ . Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4n}{100} = \frac{4n}{300} = \frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής  $n$  να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει  $n = 75k$ , όπου  $k$  θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση  $170 \leq n \leq 230$ , έχουμε:

$$170 \leq n = 75k \leq 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75} \leq k \leq \frac{230}{75} \Leftrightarrow 2 + \frac{20}{75} \leq k \leq 3 + \frac{5}{75} \Leftrightarrow k = 3.$$

Επομένως έχουμε  $n = 75 \cdot 3 = 225$  μαθητές.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευρά  $\alpha$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$  και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma Z = \Delta\Gamma$ . Αν  $E(AB\Delta)$  και  $E(AB\Delta Z)$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Delta$  και του τετραπλεύρου  $AB\Delta Z$ , αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο  $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$ .

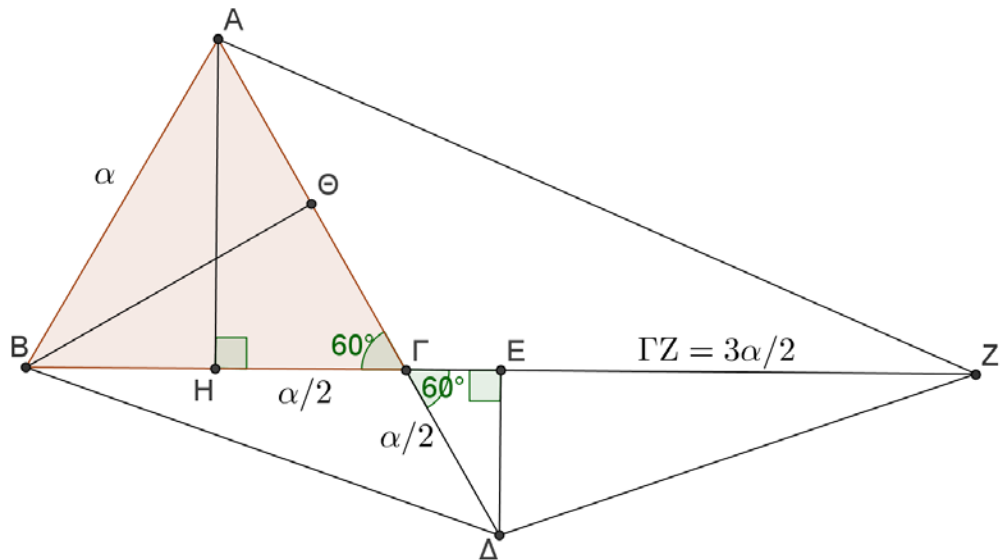
### Λύση

Το τρίγωνο  $AB\Delta$  έχει βάση  $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$  και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο  $AB\Delta Z$  έχουμε:  $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$ .

Στο τρίγωνο  $ABZ$  έχουμε βάση  $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$  και ύψος  $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ , οπότε έχει εμβαδό

$$E(ABZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο  $B\Delta Z$  έχουμε βάση  $BZ = \frac{5\alpha}{2}$  και ύψος  $\Delta E$  το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα  $AH\Gamma$  και  $\Gamma E\Delta$  ως εξής:

$$\frac{E\Delta}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε:  $E\Delta = \Gamma\Delta \eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$ .

Άρα έχουμε:

$$E(B\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $E(AB\Gamma) = E$ . Τότε  $E(B\Gamma\Delta) = \frac{E}{2}$ , γιατί έχει το ίδιο ύψος  $B\Theta$  με το τρίγωνο  $AB\Gamma$

και βάση  $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ . Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = E(AB\Gamma) + E(B\Gamma\Delta) = \frac{3E}{2}.$$

Ακόμα έχουμε:  $E(A\Gamma Z) = \frac{3E}{2}$ , γιατί έχει το ίδιο ύψος  $AH$  με το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και

βάση  $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$ . Τέλος έχουμε  $E(\Gamma\Delta Z) = \frac{3E}{4}$ , γιατί έχει το ίδιο ύψος  $\Delta E$  με το

τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  και βάση  $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$ . Έτσι έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E + \frac{E}{2} + \frac{3E}{2} + \frac{3E}{4} = \frac{15E}{4}$$

και επομένως

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{3E/2}{15E/4} = \frac{2}{5}.$$

## Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι  $\Delta$  κόβεται σε δύο κομμάτια  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  με βάρη  $\beta(\Delta_1)$  και  $\beta(\Delta_2)$ ,

αντίστοιχα, και λόγο βαρών  $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$ . Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι

ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού  $\Delta$  μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ .

### Λύση

Έστω  $\alpha(\Delta)$ ,  $\alpha(\Delta_1)$  και  $\alpha(\Delta_2)$  η αξία των διαμαντιών  $\Delta, \Delta_1$  και  $\Delta_2$ , αντίστοιχα.

Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1) + \beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά  $100 - 58 = 42\%$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος  $\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$

εξαρτάται από τους λόγους των βαρών  $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$  και  $\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$ , μπορούμε, χωρίς απώλεια

της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι  $\beta(\Delta_1) = 3$  και  $\beta(\Delta_2) = 7$  με  $\beta(\Delta) = 10$ .

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι  $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$  και  $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$  και  $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$ . Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι  $100 - (9 + 49) = 42$ , δηλαδή σε ποσοστό 42%.

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2}.$$

### Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε  $x = 2014$ , η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^2 + (2x+1)^2} + \frac{(x+2)^3 + (x-2)^3 - 18x}{x^2 + (2x-1)^2} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+1)^2 - (4x)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{5x^2+4x+1} + \frac{2x(x^2+3)}{5x^2-4x+1} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \\ &= 2x(x^2+3) \left[ \frac{1}{5x^2+4x+1} + \frac{1}{5x^2-4x+1} - \frac{2(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right] \\ &= 2x(x^2+3) \left( \frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right) = 2x(x^2+3) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα είναι

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 - 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2} = 0$$

### Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

### Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι  $x$  ευρώ και τόμου Β είναι  $y$  ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x + 120y = 4000 \Leftrightarrow 5x + 6y = 200 \quad (1)$$

$$50 \cdot \frac{90x}{100} + 60 \cdot \frac{80y}{100} = 1680 \Leftrightarrow 45x + 48y = 1680 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα



$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 6y = 200 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45x + 54y = 1800 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y = 120 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = \frac{1680 - 48y}{45} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 16 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

### Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x^2 + y^2 + xy)^2 \quad \text{και} \quad B = 2 \left[ (x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right],$$

όπου  $x, y$  είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών  $x, y$  διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του  $x$ .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\sqrt{B}$  είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών  $x, y$ .

### Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 + (xy)^2 + 2(x^2 + y^2)xy \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy)^2 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4, \\ B &= 2 \left[ (x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right] = 2 \left[ x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4 \right] \\ &= 2 \left[ 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 \right] = 4 \left( x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 \right) \\ &= 4 \left( x^2 + y^2 + xy \right)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{B} = \left| 2(x^2 + xy + y^2) \right| = 2(x^2 + xy + y^2) \in \mathbb{Q},$$

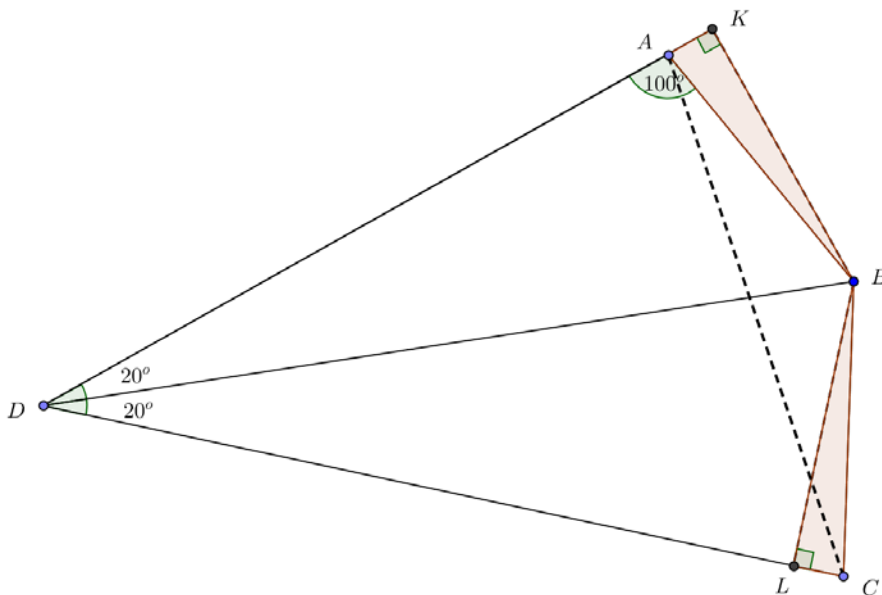
αφού οι αριθμοί  $x, y$  είναι ρητοί και  $x^2 + xy + y^2 = \left( x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ .

#### Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο  $ABCD$  με τη γωνία  $\hat{A} = 100^\circ$  και  $\hat{D} = 40^\circ$ . Αν  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $C\hat{D}A$  και  $DB = DC$ , να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας  $C\hat{A}B$ .

#### Λύση

Εφόσον η  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $C\hat{D}A$ , θα έχουμε ότι  $C\hat{D}B = B\hat{D}A = 20^\circ$  και από το ισοσκελές τρίγωνο  $DBC$  θα έχουμε ότι  $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 80^\circ$  και επιπλέον έχουμε ότι  $D\hat{B}A = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$ . Αν τώρα φέρουμε τις προβολές  $BK$  και  $BL$ , αφού το  $B$  είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι  $BK = BL$  και  $B\hat{A}K = 80^\circ$ , οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $BAK$  και  $BLC$  είναι ίσα, που σημαίνει ότι  $BA = BC$ . Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο  $BAC$  παίρνουμε ότι:  $C\hat{A}B = 20^\circ$ .



Σχήμα 4

### Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Έστω  $k$  ένας ακέραιος και  $x$  ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} \text{ και } B = \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1}.$$

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\begin{aligned}
A - B &= \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} - \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1} = \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1) - (x^{k+1} + 1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} \\
&= \frac{x^{k+2} + x^k + 1 - 2x^{k+1} - 1}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)},
\end{aligned}$$

οπότε, αφού  $x > 0$  και  $k$  ακέραιος, έχουμε:

$$A - B = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 1 \\ > 0, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, & \text{αν } x = 1 \\ A > B, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases}.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1)}{(x^{k+1} + 1)^2} = \frac{x^{2k+2} + x^k + x^{k+2} + 1}{(x^{k+1} + 1)^2} \\
&= 1 + \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)^2} = 1 + \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)^2} \geq 1.
\end{aligned}$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν,  $x = 1$ .

Επομένως έχουμε ότι:

$$A = B, \text{ αν } x = 1 \text{ και } A > B, \text{ αν } 0 < x \neq 1.$$

## Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων  $(x, y)$  που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

### Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x - y| \tag{1}$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν:  $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ .

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x - y| \geq 0 \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x - y| \in \{0, 1, 2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1.  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις:  $(x, y) = (-1, -1)$  ή  $(x, y) = (1, 1)$ .

2.  $|x - y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$  ή  $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y + 1$  ή  $x = y - 1$ .

$$\text{Για } x = y \pm 1 \text{ η εξίσωση γίνεται: } 2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$ , η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι  $\Delta = 56$

3.  $|x - y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2$  ή  $x - y = -2 \Leftrightarrow x = y + 2$  ή  $x = y - 2$ .

Για  $x = y + 2$  η εξίσωση γίνεται:  $2(y + 2)^2 - 10(y + 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$ , η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι  $\Delta = 4$  και έχει ρίζες  $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$  ή  $y = \frac{7}{5}$ .

Άρα προκύπτει η λύση  $(x, y) = (3, 1)$

Για  $x = y - 2$  η εξίσωση γίνεται:  $2(y - 2)^2 - 10(y - 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$ , η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι  $\Delta = 4$  και έχει ρίζες  $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$  ή  $y = -\frac{7}{5}$ .

Άρα προκύπτει η λύση  $(x, y) = (-3, -1)$ .

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις:  $(-1, -1), (1, 1), (3, 1), (-3, -1)$ .

### Πρόβλημα 3

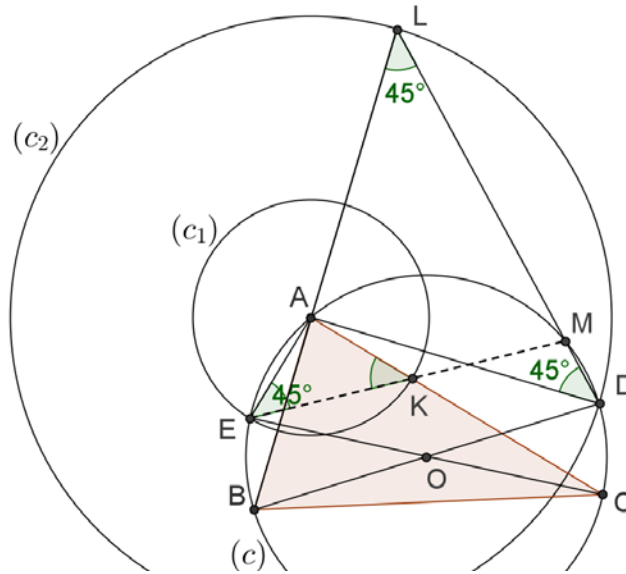
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με  $AB < AC < BC$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο ( $c$ ) (με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και έστω  $D, E$  τα αντιδιαμετρικά σημεία των  $B, C$ , αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο ( $c$ )). Ο κύκλος ( $c_1$ ) (με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AE$ ), τέμνει την  $AC$  στο σημείο  $K$ . Ο κύκλος ( $c_2$ ) (με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AD$ ), τέμνει την προέκταση της  $AB$  (προς το μέρος του  $A$ ) στο σημείο  $L$ . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $EK$  και  $DL$  τέμνονται πάνω στο κύκλο ( $c$ ).

### Λύση

Έστω  $M$  το σημείο τομής της  $DL$  με τον κύκλο ( $c$ ) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία  $E, K, M$  βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία  $\widehat{EAC}$  είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο  $EC$  του κύκλου ( $c$ ). Το τρίγωνο  $AEK$  είναι ισοσκελές (διότι  $AE, AK$  είναι ακτίνες του κύκλου ( $c_1$ )). Άρα:

$$\widehat{AEK} = \widehat{AKE} = 45^\circ. \quad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία  $\widehat{BAD}$  είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο  $BD$  του κύκλου  $(c)$ , οπότε και η γωνία  $\widehat{DAL}$  είναι ορθή. Το τρίγωνο  $ADL$  είναι ισοσκελές (διότι  $AD, AL$  είναι ακτίνες του κύκλου  $(c_2)$ ). Άρα έχουμε

$$\widehat{ADL} = \widehat{ALD} = 45^\circ. \quad (2)$$

Οι γωνίες  $\widehat{ADM} = \widehat{ADL}$  και  $\widehat{AEM}$  είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο  $(c)$  και βαίνουν στο τόξο  $\widehat{AM}$ , δηλαδή

$$\widehat{AEM} = \widehat{ADL} \quad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα  $\widehat{AEK} = \widehat{AEM} = 45^\circ$ , οπότε τα σημεία  $E, K, M$  είναι συνευθειακά.

#### Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος  $x$  μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

#### Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8 \cdot 100 + (x - 8) \cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \quad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$M.O. = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x + 240}{x} = 70 + \frac{240}{x}. \quad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει  $x < 30$ , τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$M.O. = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \quad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι  $x < 30$ , οπότε πρέπει να είναι  $x \geq 30$ .

Παρατηρούμε ότι για  $x = 30$ , έχουμε την περίπτωση

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30 - 8) \cdot 70}{30} = \frac{30 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70 + 8 = 78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του  $x$  είναι 30.

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των  $x$  σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

### Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής  $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  με τον άξονα των  $x$  είναι της μορφής  $A_1(x_1, 0)$  και  $A_2(x_2, 0)$ , όπου  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3\alpha - 5, \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = 186 \quad (2)$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες  $x_1$  και  $x_2$  να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω  $|x_1| < |x_2|$ , από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι  $x_1, x_2$  πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο  $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$ . Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1, 186), (2, 93), (3, 62), (6, 31), (-1, -186), (-2, -93), (-3, -62), (-6, -31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι:  $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3}$ , οπότε οι δυνατές τιμές για την

παράμετρο  $\alpha \in \mathbb{R}$  είναι οι εξής:  $64, \frac{100}{3}, \frac{70}{3}, 14, -\frac{182}{3}, -30, -20, -\frac{32}{3}$ .

### Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το  $x^2 y^2$  η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

Επομένως, έχουμε  $x^2 + y^2 - xy = \frac{91}{13} = 7$ . Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη

εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι:  $2(x^2 + y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$ , οπότε

$xy = 3$  από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 4 \\ x-y = \pm 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = -2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (x, y) = (3, 1) \text{ ή } (x, y) = (-1, -3) \text{ ή } (x, y) = (1, 3) \text{ ή } (x, y) = (-3, -1). \end{aligned}$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έχουμε

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases},$$

οπότε, αν θέσουμε  $\varphi = x^2 + y^2$  και  $\omega = xy$ , λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varphi^2 - \omega^2 = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi + \omega)(\varphi - \omega) = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi - \omega = 7 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 10 \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$ ). Η διχοτόμος  $B\Delta$  τέμνει τον κύκλο  $C(O, R)$ , στο σημείο  $Z$ . Έστω  $E$  τυχόν σημείο του τμήματος  $\Delta\Gamma$ . Η ευθεία  $BE$  τέμνει τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $H$ . Οι ευθείες  $A\Gamma$  και  $ZH$  τέμνονται στο σημείο  $\Theta$ . Επίσης, η ευθεία  $ZE$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $K$ . Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα  $B\Delta H\Theta$ ,  $B\Delta EK$  και  $\Delta Z\Theta K$  είναι εγγράψιμα.

### Λύση

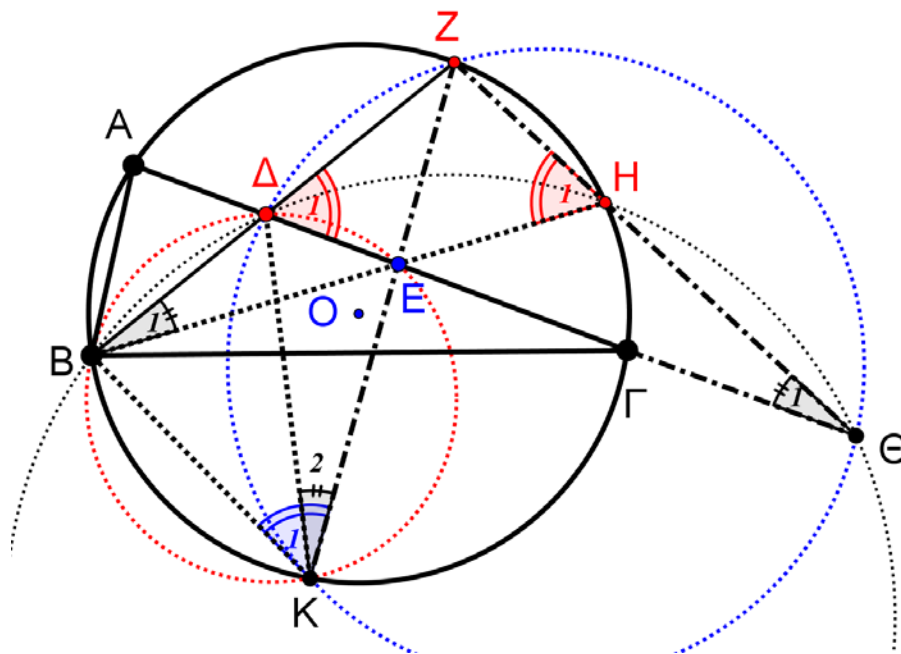
Η γωνία  $\hat{H}_1$  είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο  $C(O, R)$  και βαίνει στο τόξο  $BZ$ .

Άρα:

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $A\Delta Z$ . Άρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}Z + A\hat{Z}B = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών  $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$ , προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο  $B\Delta H\Theta$  είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $BKHZ$  έχουμε:  $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$ , η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα  $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$ , μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου  $B\Delta EK$ .**

Από το εγγράψιμο  $B\Delta EK$  έχουμε:  $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$ . Από το εγγράψιμο  $B\Delta H\Theta$  έχουμε:  $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$ . Άρα είναι:  $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$ .

Επομένως και **το τετράπλευρο  $\Delta Z\Theta K$  είναι εγγράψιμο.**

#### Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς  $n$ , που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες  $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$  και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

#### Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1, d_4 = n \text{ και } d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$

$$\Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 640 \Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά  $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$  και επειδή οι  $d_2$  και  $d_3$  είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n = 3 \cdot 159$  έχει και άλλους διαιρέτες.



- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n=4 \cdot 127$  έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$ , οπότε είναι  $n=7 \cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n=9 \cdot 63$  έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n=15 \cdot 39$  έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31$ , οπότε είναι  $n=19 \cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.