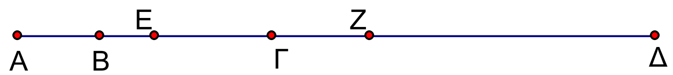
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 30

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1.

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ώστε $ΑΒ < \frac{ΑΓ}{2}$, $ΒΓ < \frac{ΒΔ}{2}$ και ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΕΖ = \frac{ΑΔ - ΒΓ}{2}$

Λύση



$ΑΒ < \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow$ το Ε είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΒΓ

$ΒΓ < \frac{ΒΔ}{2} \Rightarrow$ το Ζ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ

Θέτουμε ΑΒ = x, ΒΓ = y, ΓΔ = ω.

Μπορούμε, τώρα, να υπολογίσουμε οποιοδήποτε τμήμα συναρτήσει των x, y, ω.

$$ΓΕ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ}{2} = \frac{x + y}{2}$$

$$ΓΖ = ΓΔ - ΖΔ = ω - \frac{ΒΔ}{2} = ω - \frac{y + ω}{2} = \frac{2ω - y - ω}{2} = \frac{ω - y}{2}$$

Άρα $ΕΖ = ΕΓ + ΓΖ = \frac{x + y}{2} + \frac{ω - y}{2} = \frac{x + ω}{2}$ **(1)**

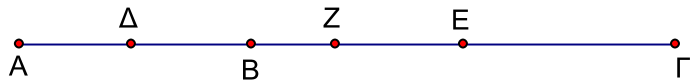
Αλλά $\frac{ΑΔ - ΒΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ - ΒΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{x + ω}{2}$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow ΕΖ = \frac{ΑΔ - ΒΓ}{2}$

2.

Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα AB, $B\Gamma$. Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔE, BZ έχουν κοινό μέσο.

Λύση



Θέτουμε $AB = x$, $B\Gamma = y$

Μπορούμε, τώρα, να υπολογίσουμε οποιοδήποτε τμήμα συναρτήσει των x, y.

$$ZE = Z\Gamma - E\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2} \quad \textbf{(1)}$$

$$B\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2} \quad \textbf{(2)}$$

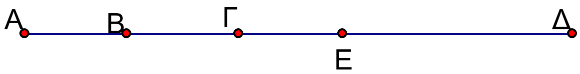
Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $ZE = B\Delta$.

Άρα τα τμήματα ΔE, BZ έχουν κοινό μέσο.

3.

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ονομάζουμε E το μέσο του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $AE > \dfrac{A\Gamma}{2}$

Λύση



Θέτουμε $AB = x$, $B\Gamma = y$, $\Gamma\Delta = \omega$.

Μπορούμε, τώρα, να υπολογίσουμε οποιοδήποτε τμήμα συναρτήσει των x, y, ω.

$$AE = AB + BE = x + \frac{B\Delta}{2} = x + \frac{B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = x + \frac{y+\omega}{2} = \frac{2x+y+\omega}{2} \quad \textbf{(1)}$$

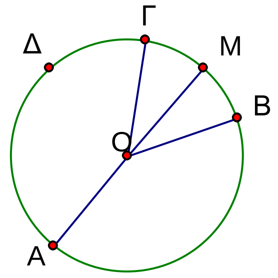
$$\frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB + B\Gamma}{2} = \frac{x+y}{2} \quad \textbf{(2)}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $AE > \dfrac{A\Gamma}{2}$

4.

Θεωρούμε κύκλο (O, R) και τα διαδοχικά σημεία του A, B, Γ, Δ, ώστε $AB = 150^0$, $ΓΔ = 45^0$ και $AΔ = 105^0$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $BOΓ$ είναι αντικείμενη ημιευθεία της OA.

Λύση



Έστω M το μέσο του $BΓ$.

Τότε OM διχοτόμος της $BOΓ$.

$BΓ = 360^0 - 150^0 - 45^0 - 105^0 = 60^0$.

$$BM = \frac{BΓ}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$$

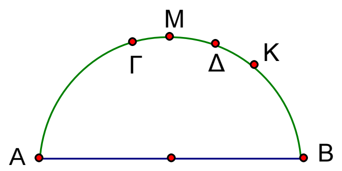
$ABM = AB + BM = 150^0 + 30^0 = 180^0$

Άρα OM, OA αντικείμενες.

5.

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB, M το μέσο του τόξου AB και K τυχαίο σημείο του τόξου BM. Αν Γ και Δ τα μέσα των τόξων AK, MK αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου ΓΔ.

Λύση



Έστω $(AK) = x$

Μπορούμε, τώρα, να υπολογίσουμε οποιοδήποτε τόξο συναρτήσει του x

$$(ΓΔ) = (ΓK) - (ΔK) = \frac{(AK)}{2} - \frac{(MK)}{2} = \frac{x}{2} - \frac{(AK) - (AM)}{2} =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x - 90}{2} = \frac{x - x + 90}{2} = 45$$