

2.1 – 2.10

Ασκήσεις σχ.βιβλίου σελίδας 13 – 14

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν

- i) κανένα κοινό σημείο
- ii) Ένα κοινό σημείο
- iii) Δύο κοινά σημεία
- iv) Άπειρα κοινά σημεία

Αιτιολογήστε την απάντησή σας

Απάντηση

Μπορεί να έχουν κανένα κοινό σημείο ή ένα μόνο κοινό σημείο.

Διαφορετικά δεν θα είναι διαφορετικές

2.

Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:

- i) με αρχή το σημείο A
- ii) με αρχή το σημείο B



Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

Απάντηση

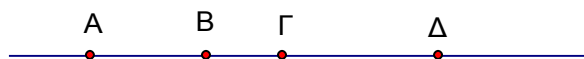
- i) Με αρχή το A ορίζονται οι ημιευθείες Ax και AΨ
- ii) Με αρχή το B οι Bx, BΨ

Αντικείμενες είναι : η Ax με την AΨ

η Bx με τη BΨ

3.

Τα σημεία A, B, Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το B είναι μεταξύ των A, Γ και το Γ μεταξύ των A, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των B και Δ



Απάντηση

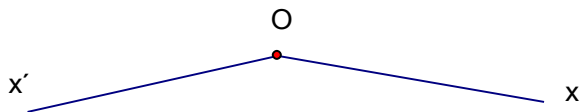
Αφού το B είναι μεταξύ των A και Γ το B θα είναι αριστερά του Γ

Αφού το Γ είναι μεταξύ των A και Δ το Δ θα είναι δεξιά του Γ

Τα B και Δ βρίσκονται λοιπόν εκατέρωθεν του Γ άρα το Γ θα είναι μεταξύ των B και Δ

4.

Οι ημιευθείες Ox' και Ox του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες ;



Απάντηση

Όχι αφού δεν έχουν τον ίδιο φορέα

5.

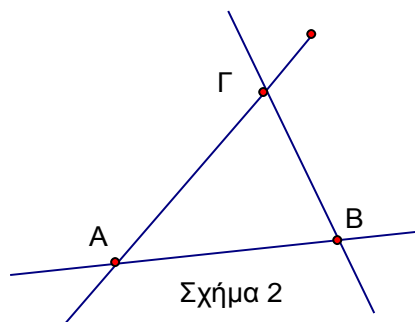
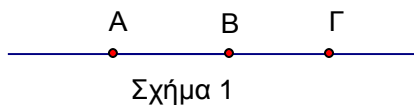
Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία ;

Απάντηση

Τα δύο εκ των τριών σημείων ορίζουν μία μόνο ευθεία AB .

Αν λοιπόν το τρίτο σημείο Γ είναι πάνω σ' αυτή (σχήμα 1), τότε τα τρία σημεία ορίζουν μία μόνο ευθεία .

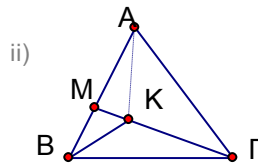
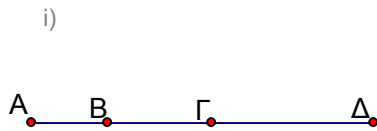
Αν όμως δεν είναι πάνω σ' αυτή (σχήμα 2) τότε ορίζονται δύο ακόμα ευθείες οι ΓA και ΓB



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων.



Λύση

i)

AB, AΓ, AΔ, BΓ, BΔ, ΓΔ

ii)

AM, AB, AK, AΓ, BM, BK, BΓ, ΓK, ΓM, KM

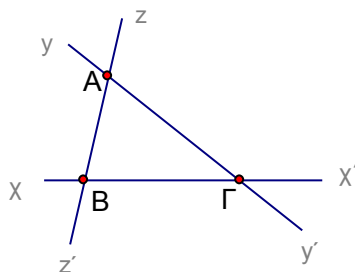
2.

Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δύο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε

i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών

ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.

Λύση



Έστω xx' , yy' , zz' οι τρεις ευθείες

i) Οι ευθείες xx' , yy' τέμνονται σε ένα μόνο σημείο Γ .

Ομοίως οι yy' , zz' τέμνονται σε ένα μόνο σημείο B , και οι zz' , xx' σε σημείο A .

Άρα τρία σημεία τομής των ευθειών.

ii)

Με αρχή το A έχουμε τις ημιευθείες Ay , Ay' , Az , Az' , τέσσερις το πλήθος.

Άλλες τέσσερις με αρχή το B και άλλες τέσσερις με αρχή το Γ .

Σύνολο, λοιπόν, δώδεκα ημιευθείες.

Τα σημεία A , B , Γ ανά δύο δημιουργούν ένα ευθ. τμήμα. Άρα έχουμε τρία ευθ. τμήματα τα AB , $B\Gamma$, ΓA .

3.

Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ και Δ ώστε $AB = \Gamma\Delta$.
Να δικαιολογήσετε ότι $A\Gamma = B\Delta$.

Λύση

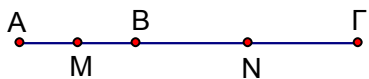


$$AB = \Gamma\Delta \Rightarrow AB + B\Gamma = \Gamma\Delta + B\Gamma \Rightarrow A\Gamma = B\Delta$$

4.

Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ . Αν M και N είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι $A\Gamma = 2MN$.

Λύση



Είναι $AB = 2MB$ και
 $B\Gamma = 2BN$

Προσθέτουμε κατά μέλη.

Τότε $AB + B\Gamma = 2MB + 2BN \Rightarrow$

$$A\Gamma = 2(MB + BN) \Rightarrow$$

$$A\Gamma = 2MN$$

2^{ος} τρόπος

Όλα εξαρτώνται από τα τμήματα AB και $B\Gamma$.

Θέτουμε, λοιπόν, $AB = \beta$ και $B\Gamma = \gamma$.

Κάθε άλλο τμήμα θα το εκφράσουμε συναρτήσει των β, γ .

$$A\Gamma = AB + B\Gamma = \beta + \gamma \quad MA = MB = \frac{AB}{2} = \frac{\beta}{2} \quad NB = N\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

$$2MN = 2(MB + BN) = 2\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 2 \frac{\beta + \gamma}{2} = \beta + \gamma = A\Gamma.$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Αν E , Z είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } EZ = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \qquad \text{ii) } A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$$

Λύση



Όλα εξαρτώνται από τα τμήματα AB , $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

Θέτουμε, λοιπόν, $AB = \beta$, $B\Gamma = \gamma$ και $\Gamma\Delta = \delta$

Κάθε άλλο τμήμα θα το εκφράσουμε συναρτήσει των β , γ και δ .

$$EA = EB = \frac{\beta}{2} \qquad Z\Gamma = Z\Delta = \frac{\delta}{2} \qquad A\Delta = \beta + \gamma + \delta$$

i)

$$EZ = EB + B\Gamma + \Gamma Z = \frac{\beta}{2} + \gamma + \frac{\delta}{2} = \frac{\beta + 2\gamma + \delta}{2} \quad (1)$$

$$\frac{A\Delta + B\Gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma + \delta + \gamma}{2} = \frac{\beta + 2\gamma + \delta}{2} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow EZ = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

ii)

$$A\Gamma + B\Delta = AB + B\Gamma + B\Gamma + \Gamma\Delta = \beta + \gamma + \gamma + \delta = \beta + 2\gamma + \delta \quad (3)$$

$$A\Delta + B\Gamma = \beta + \gamma + \delta + \gamma = \beta + 2\gamma + \delta \quad (4)$$

$$\text{Από τις (3), (4)} \Rightarrow A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$$

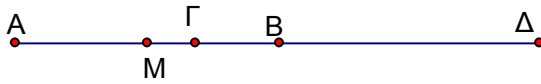
2.

Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα AB , το μέσο του M , Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος MB και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος AB .

Να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } \Gamma M = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2} \qquad \text{ii) } \Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}$$

Λύση



Έστω ότι το Δ βρίσκεται πέραν του B .

Όλα εξαρτώνται από τη θέση των σημείων A , B , Γ , Δ .

Θέτουμε, λοιπόν, $AB = \beta$, $A\Gamma = \gamma$ και $A\Delta = \delta$

Κάθε άλλο τμήμα θα το εκφράζουμε συναρτήσει των β , γ και δ .

$$\Gamma B = AB - A\Gamma = \beta - \gamma, \quad B\Delta = A\Delta - AB = \delta - \beta, \quad \Gamma\Delta = A\Delta - A\Gamma = \delta - \gamma$$

$$AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{\beta}{2}$$

i)

$$\Gamma M = A\Gamma - AM = \gamma - \frac{\beta}{2} = \frac{2\gamma - \beta}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{\Gamma A - \Gamma B}{2} = \frac{\gamma - (\beta - \gamma)}{2} = \frac{\gamma - \beta + \gamma}{2} = \frac{2\gamma - \beta}{2} \qquad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow \Gamma M = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$$

ii)

$$\Delta M = A\Delta - AM = \delta - \frac{\beta}{2} = \frac{2\delta - \beta}{2} \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta A + \Delta B}{2} = \frac{\delta + A\Delta - AB}{2} = \frac{\delta + \delta - \beta}{2} = \frac{2\delta - \beta}{2} \qquad (4)$$

$$\text{Από τις (3), (4)} \Rightarrow \Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}$$

3.

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων A, B, Γ ισχύει $AB \leq A\Gamma + \Gamma B$.
- ii) Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $A\Delta \leq A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$.

Λύση

i)

- α) Όταν Γ μεταξύ A και B



Προφανώς ισχύει η ισότητα.

- β) Όταν B μεταξύ A και Γ



Προφανώς ισχύει η ανισότητα

- γ) Όταν A μεταξύ B και Γ



Προφανώς ισχύει η ανισότητα

ii)

Εφαρμόζουμε το i) για τη τριάδα A, Δ, B : $A\Delta \leq AB + B\Delta$ **(1)**

Εφαρμόζουμε το i) για τη τριάδα A, B, Γ : $AB \leq A\Gamma + \Gamma B$ **(2)**

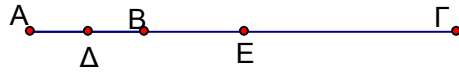
$$(1) \Rightarrow A\Delta \leq AB + B\Delta \stackrel{(2)}{\leq} A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$$

Σύνθετα Θέματα

1.

Αν A, B, Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, E τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$

Λύση



Όλα εξαρτώνται από τη θέση των σημείων A, B, Γ .

Θέτουμε, λοιπόν, $AB = \beta, A\Gamma = \gamma$.

Κάθε άλλο τμήμα το εκφράζουμε συναρτήσει των β, γ

$$B\Gamma = A\Gamma - AB = \gamma - \beta \quad A\Delta = \Delta B = \frac{AB}{2} = \frac{\beta}{2} \quad A\Delta = \Delta E = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

$$BE = A\Delta - AB = \frac{\gamma}{2} - \beta = \frac{\gamma - 2\beta}{2}$$

$$\Delta E = \Delta B + BE = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma - 2\beta}{2} = \frac{\beta + \gamma - 2\beta}{2} = \frac{\gamma - \beta}{2} \quad (1)$$

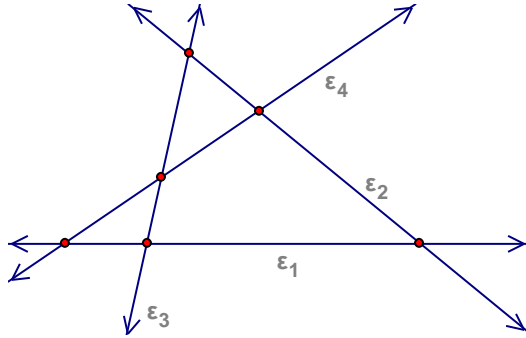
$$\frac{B\Gamma}{2} = \frac{\gamma - \beta}{2} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}.$$

2.

Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει ένα τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για n δρόμους ($n \geq 2$)

Λύση



Κάθε ευθεία (ας πούμε η ε_1)

τέμνει τις υπόλοιπες σε

$$3 = 4 - 1 \text{ σημεία.}$$

Άρα το πλήθος των σημείων

τομής όλων των ευθειών με όλες

$$\text{είναι } (4 - 1) \cdot 4 = 12.$$

Έτσι όμως, έχει υπολογισθεί δύο

φορές η κάθε διασταύρωση.

Άρα το πλήθος των

διασταυρώσεων είναι $\frac{(4-1)4}{2} = 6$. Επομένως θα χρειαστούν 6 τροχονόμοι

Με τους ίδιους συλλογισμούς, όταν οι οδοί είναι πλήθους n , θα χρειαστούν $\frac{(n-1)n}{2}$ τροχονόμοι.