



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right).$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \frac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}.$$

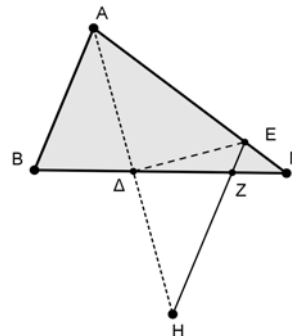
Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ .

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔH έτσι ώστε $A\Delta = \Delta H$. Από το σημείο H φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z .

1. Να αποδείξετε ότι : $\hat{A}\Delta E = 90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\hat{E}\Delta Z$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$.



*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2, 8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4, -4)$ και $M(-1, 2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος KL .

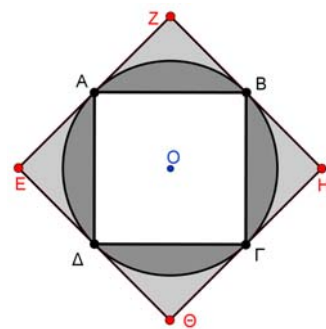
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O, \rho)$ στα σημεία A, B, Γ και Δ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου $EZH\Theta$ και εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3,1415$).



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}$$

Πρόβλημα 3

(α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho < AB$ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Δ , αντίστοιχα. Οι ευθείες $B\Delta$, ΓE τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K , N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και S το σημείο τομής των ΔN , $E K$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x) = \frac{(x+2)(2x-1)(x-1) + x - 4}{x^2 - 2}, \quad x \neq \pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2012 \cdot 4019 \cdot 2009 + 2006}{2010^2 - 2},$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x , έχει ρίζες στο \mathbb{R} , για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2, \quad z = y^3 + 2y - 2, \quad x = z^3 + 2z - 2.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{A} , \hat{B} και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία Δ , E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z , θεωρούμε παράλληλη στην $A\Gamma$, που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο M . Από το σημείο E , θεωρούμε παράλληλη στην AB , που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα $BMOZ$ και ΓNOE είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2) , αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω K , των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔI , όπου I το έκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2 + 3x + 2)^4 + (x^2 + x - 2)^4 = 16(x + 2)^4.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, αν το σύστημα

$$\left\{ \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda, \quad 2x - y = -\lambda \right\} \quad (\Sigma)$$

έχει λύση στο \mathbb{R} , για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ , τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T , τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία A, I, Λ, M και A, I, K, N , όπου I το έκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2) , αντίστοιχα.
- β) Αν η $A\Delta$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη κορυφή A , τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!