ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$$

Πρόβλημα 3
Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.
(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$ και $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{AB}$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},\ \text{αν είναι } x=2^{-10}, y=4^{-8}, z=8^{-6},$$

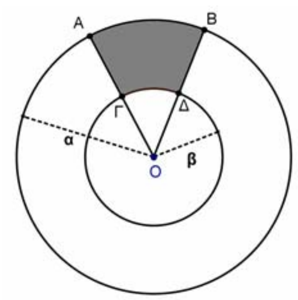
και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x-5\alpha+2<\alpha\left(x-3\right)+2\left(\alpha-1\right).$$

Πρόβλημα 3
Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους $\left(\mathrm{O},\alpha\right)$ και $\left(\mathrm{O},\beta\right)$, $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Πρόβλημα 4
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ cm και $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Delta}$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $\mathrm{E\Gamma}=2\cdot\mathrm{AE}$, να βρείτε:

- **(i)** το μήκος της πλευράς ΑΒ.
- **(ii)** Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}=2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν $\alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha,$$

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N, αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση
$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι
$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$
και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM,KT,NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!