



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Γυμνασίου

1. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y .

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο A του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρέτο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο I . Η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AG τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Αν είναι $\hat{I}\Delta\Gamma = 70^\circ$ και $\hat{I}\hat{E}\Gamma = 130^\circ$, να βρεθούν:

α) η γωνία \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) οι γωνίες $\hat{B}\hat{I}\Delta$ και $\hat{E}\hat{I}\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Γυμνασίου

1. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:
 $A = 7x + 10y - 3w - 87$.

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας A φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

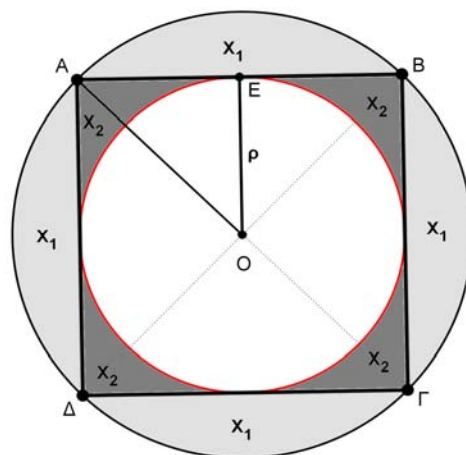
4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 2ρ . Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O, OA)$ που ορίζονται από τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O, \rho, OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O, \rho)$ και $C(O, OA)$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 , αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$

μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O, x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O, \rho, OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Από τυχόν σημείο E του ύψους $A\Delta$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία M, N έτσι ώστε $EM = EN$ και $MB < M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ και NB τέμνονται πάνω στο ύψος $A\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β' Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$

$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$

$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z .

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι κύκλοι $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = AB$) και $c_2(A, A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = A\Gamma$). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ . Ο κύκλος $c_2(A, A\Gamma)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και έστω E το μέσο της διχοτόμου $B\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(2x^2 + 3x + 1)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 = 7(x^2 - 1)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E . Αν η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Lambda$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m , όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(O_1, r_1)$ και $c_2(O_2, r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B , αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(O_1, r_1)$, $c_2(O_2, r_2)$ και ισχύει ότι $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.