



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Ο «**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**» θα διενεργηθεί στις **15 Ιανουαρίου 2011** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **26 Φεβρουαρίου 2011** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **28^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρουμανία, Μάιος 2011)**, στην **15^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Κύπρος, Ιούνιος 2011)** και στην **52^η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ολλανδία, Ιούλιος 2010)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
11. **Παρακαλούμαι τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και την παραδώσει στους επιτηρητές.**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Γρηγόριος Καλογερόπουλος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Γυμνασίου

1. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y .

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο A του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρέτες τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο I . Η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AG τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Αν είναι $\hat{I}\Delta\Gamma = 70^\circ$ και $\hat{I}\hat{E}\Gamma = 130^\circ$, να βρεθούν:

α) η γωνία \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) οι γωνίες $\hat{B}\hat{I}\Delta$ και $\hat{E}\hat{I}\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Γυμνασίου

1. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:
 $A = 7x + 10y - 3w - 87$.

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας A φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

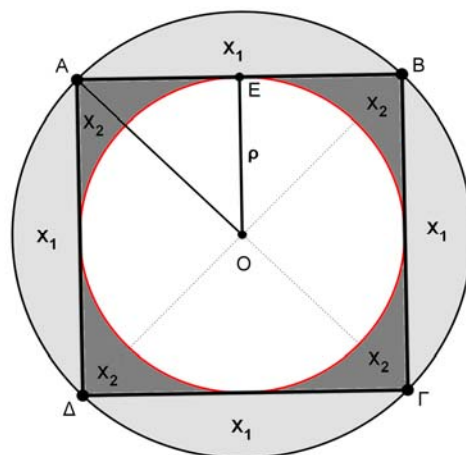
4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 2ρ . Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O, OA)$ που ορίζονται από τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O, \rho, OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O, \rho)$ και $C(O, OA)$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 , αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$

μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O, x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O, \rho, OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Από τυχόν σημείο E του ύψους $A\Delta$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία M, N έτσι ώστε $EM = EN$ και $MB < M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ και NB τέμνονται πάνω στο ύψος $A\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β' Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$

$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$

$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z .

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι κύκλοι $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = AB$) και $c_2(A, A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = A\Gamma$). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ . Ο κύκλος $c_2(A, A\Gamma)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και έστω E το μέσο της διχοτόμου $B\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(2x^2 + 3x + 1)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 = 7(x^2 - 1)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E . Αν η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Lambda$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m , όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(O_1, r_1)$ και $c_2(O_2, r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B , αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(O_1, r_1)$, $c_2(O_2, r_2)$ και ισχύει ότι $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y .

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A , του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4 \cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2 = 4 \cdot 25 - 64 + 7 \cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y . Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33, 99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{r} 16 \quad 32 \quad 248 \\ 16 \quad 0 \quad 8 \\ 0 \quad 0 \quad 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16, 32, 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8 \cdot 6 + \nu = 48 + \nu$, όπου ν ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του ν στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\nu = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο I . Η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο I προς την πλευρά AG τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Αν είναι $\hat{I}\Delta\Gamma = 70^\circ$ και $\hat{I}\epsilon\Gamma = 130^\circ$, να βρεθούν:

- α) η γωνία \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$.
 β) οι γωνίες $\hat{B}\hat{I}\Delta$ και $\hat{E}\hat{I}\Gamma$.

Λύση

α. Εφόσον $I\Delta // AB$ θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = 70^\circ$, (ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $I\Delta, AB$ τεμνομένων από την $B\Delta$).

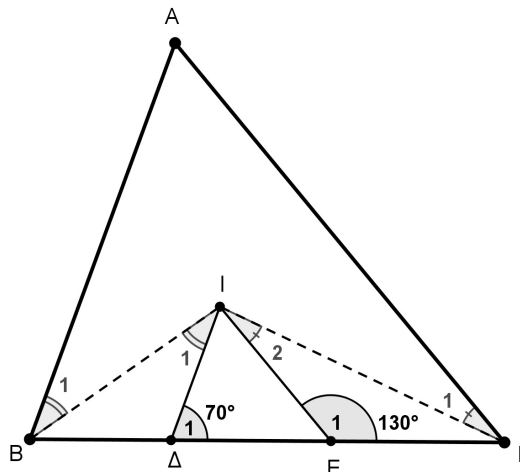
Επειδή είναι $IE // AG$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. (Οι γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{E}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων IE, AG τεμνομένων από την EG).

Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$

β. Επειδή η $I\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$.

Επίσης, επειδή $I\Delta // AB$, θα ισχύει: $\hat{I}_1 = \hat{B}_1 = 35^\circ$, γιατί οι γωνίες \hat{I}_1, \hat{B}_1 είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $I\Delta, AB$ που τέμνονται από την IB .



Σχήμα 1

Εφόσον $I\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

Επίσης είναι $IE // AG$, οπότε θα ισχύει: $\hat{I}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 25^\circ$, αφού οι γωνίες $\hat{I}_2, \hat{\Gamma}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες IE, AG που τέμνονται από την $I\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα $120+80=200$ ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ίδιας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι $2600:200=13$ κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της

παράστασης: $A = 7x + 10y - 3w - 87$.

Λύση

Έχουμε $x + y = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$ και

$$\begin{aligned} y - w &= \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4} = \left(-\frac{3}{5} \right)^{24} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^{-24} = \left(-\frac{3}{5} \right)^{24} \cdot \left(-\frac{5}{3} \right)^{24} \\ &= \left[\left(-\frac{3}{5} \right) \cdot \left(-\frac{5}{3} \right) \right]^{24} = 1^{24} = 1. \end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$\begin{aligned} A &= 7x + 10y - 3w - 87 = 7x + 7y + 3y - 3w - 87 \\ &= 7(x + y) + 3(y - w) - 87 = 7 \cdot 12 + 3 \cdot 1 - 87 = 84 + 3 - 87 = 0. \end{aligned}$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw} = 1000 \cdot x + 100 \cdot y + 10 \cdot z + w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το (α) θα είναι $w = 0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το (β) θα είναι $z = 0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το (γ) θα είναι $y = 1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100}, \overline{x124}, \overline{x148}, \overline{x500}, \overline{x524}, \overline{x548}.$$

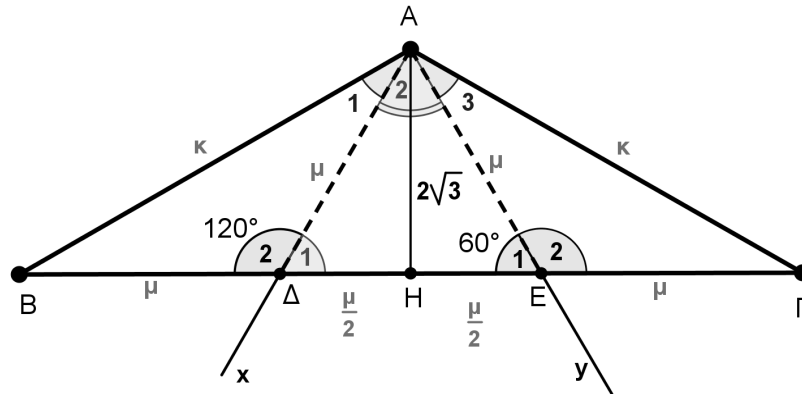
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς 4500, 4524, 4548, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας A φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}\hat{\Delta}B = 120^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^\circ$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{E}_1 = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες $A\Delta$ (Ax) και AE (Ay) είναι κάθετες προς τις $A\Gamma$ και AB , θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} - 90^\circ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ έχουν: $A\Delta = AE$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Delta E$), $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2 = 120^\circ$ και $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = 30^\circ$. Επομένως τα τρίγωνα $AB\Delta$, $AG\epsilon$ είναι ίσα και συνεπώς $AB = AG$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\epsilon B$ και $A\Delta\Gamma$ που έχουν $\hat{A}\hat{E}B = 60^\circ = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, οπότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$, δηλαδή $AB\Gamma$ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου $A\Delta E$ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AH\Delta$ έχουμε:

$$A\Delta^2 = AH^2 + \Delta H^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AHB έχουμε:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

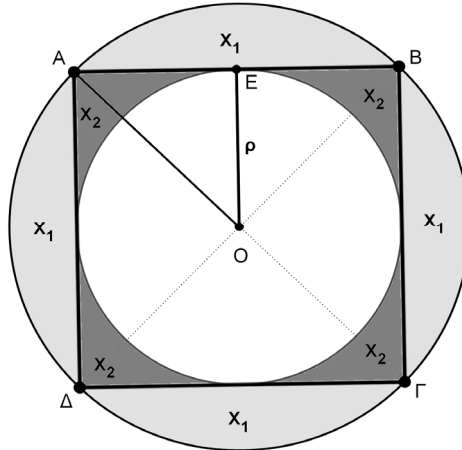
4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 2ρ . Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O, \rho A)$ που ορίζονται από τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O, \rho, OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O, \rho)$ και $C(O, OA)$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 ,

αντίστοιχα έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O, x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O, \rho, OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAE με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OA^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow OA = \rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E(\Delta(O, \rho, OA)) = \pi(\rho\sqrt{2})^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου O και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνου $AB\Gamma\Delta$.

Άρα είναι

$$E(X_1) = \pi(\rho\sqrt{2})^2 - (2\rho)^2 = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = (2\pi - 4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνου $AB\Gamma\Delta$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου O και ακτίνας ρ , δηλαδή

$$E(X_2) = (2\rho)^2 - \pi\rho^2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5} \Leftrightarrow 5(2\pi - 4) > 13(4 - \pi) \Leftrightarrow 23\pi > 72 \Leftrightarrow \pi > \frac{72}{23} \cong 3,1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi \cong 3,14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho < x < \rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[(\rho\sqrt{2})^2 - x^2\right] = \pi(x^2 - \rho^2) \Leftrightarrow 2\rho^2 - x^2 = x^2 - \rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3\rho^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\rho^2}{2} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2 - 5x = 14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5) = 14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2 - 5x - 14 = 0, \quad \text{με } \alpha = 1, \beta = -5, \gamma = -14,$$

οπότε είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = 7$ ή $x = -2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4} \Leftrightarrow 2x - 2 + x^2 - 1 < x^2 - x \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x = -2$.

2. Αν οι α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4 \\ &= (\alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2) - (\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta^3\gamma^2 + \beta^4\gamma^2) - (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^4) \\ &= \alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \beta^2\gamma^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2\gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2) = [\alpha^2 - (\beta\gamma)^2][(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] \\ &= (\alpha + \beta\gamma)(\alpha - \beta\gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y} = w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x - 8w = 2 \\ x - 4w = 13 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ x = 13 + 4w \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ 2 + 8w = 13 + 4w \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ 8w - 4w = 13 - 2 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ 4w = 11 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8 \cdot \frac{11}{4} \\ w = \frac{11}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2 \cdot 11 \\ w = \frac{11}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 24 \\ w = \frac{11}{4} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = \left(24, \frac{4}{11}\right)$

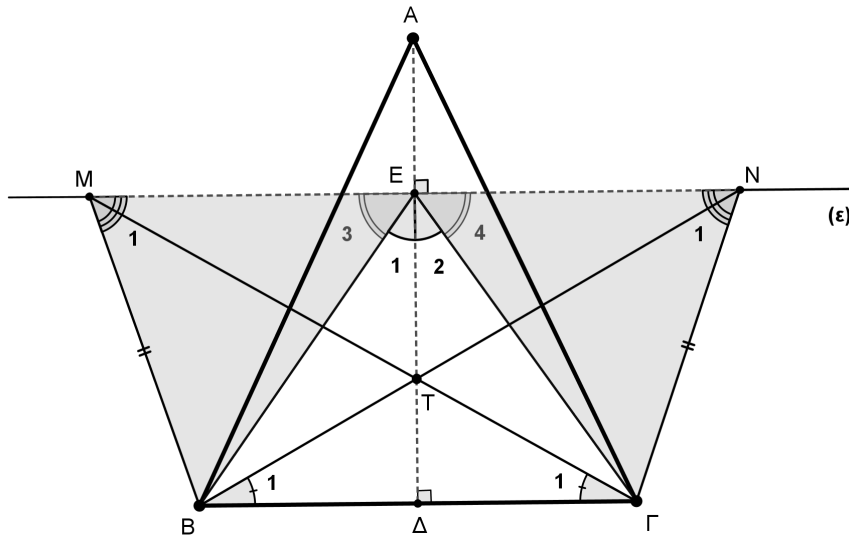
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $A\Delta$. Από τυχόν σημείο E του ύψους $A\Delta$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία M, N έτσι ώστε $EM = EN$ και $MB < M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ και NB τέμνονται πάνω στο ύψος $A\Delta$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες ($AB = A\Gamma$) και δύο οξείες γωνίες ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) ίσες. Άρα $\Delta B = \Delta \Gamma$, δηλαδή το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα $E\Delta B$ και $E\Delta \Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($E\Delta$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $\Delta B = \Delta \Gamma$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ και $EB = E\Gamma$.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ γιατί οι γωνίες \hat{E}_3, \hat{E}_4 είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών \hat{E}_1, \hat{E}_2 .



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα EMB και ENG είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $EM = EN$ (από τα δεδομένα της άσκησης).
2. $EB = E\Gamma$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $E\Delta B$ και $E\Delta \Gamma$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών \hat{E}_1, \hat{E}_2).

Άρα θα έχουν $MB = NG$ και $EMB = ENG$.

Τα τρίγωνα MNB και MNG είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).
 2. $MB = NG$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και ENG).
 3. $EMB = ENG$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και ENG).
- Άρα θα έχουν και $MG = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος MBG και NBG είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $BG = BG$ (η πλευρά BG είναι κοινή)
2. $MB = NG$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και ENG)
3. $M\hat{B}G = M\hat{B}E + E\hat{B}G = N\hat{G}E + E\hat{G}B = N\hat{G}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των MG και NB , σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$, συμπεραίνουμε ότι η TD είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου TBG , δηλαδή η TD είναι κάθετη προς τη BG στο σημείο D . Άρα το σημείο T , θα ανήκει στο ύψος AD .

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y - z} &= x - 2 \\ \sqrt{y^2 - z - x} &= y - 2 \\ \sqrt{z^2 - x - y} &= z - 2,\end{aligned}$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z .

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2$, $y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y + z$, $y^2 \geq z + x$ και $z^2 \geq x + y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{array} \right\}, \quad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x + y + z = 6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{array} \right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2$, $y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y + z > 6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x = y = z = 2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι κύκλοι $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = AB$) και $c_2(A, A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = A\Gamma$). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ . Ο κύκλος $c_2(A, A\Gamma)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.

Λύση

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{x} + \frac{4y^2 + 4y + 1}{y} \geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y) + 8 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

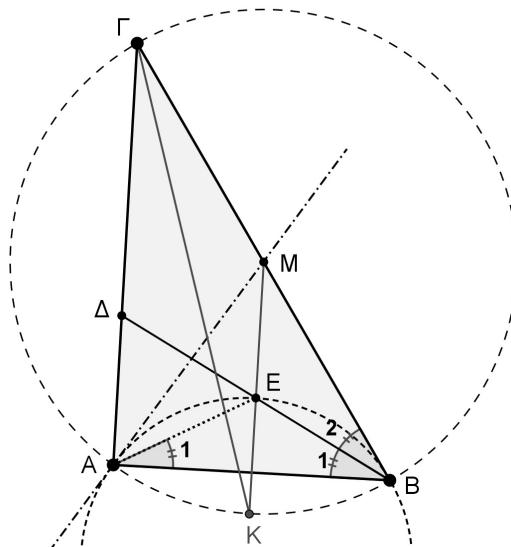
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq 1 \Leftrightarrow xy \leq 4 \Leftrightarrow x(4-x) \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και έστω E το μέσο της διχοτόμου $B\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

Επειδή E είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Delta$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Delta$, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η BD είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η GB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB .

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής - εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB . Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB .

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτεινούσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB , οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB , από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(2x^2 + 3x + 1)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 = 7(x^2 - 1)^3.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Αν θέσουμε $a = 2x^2 + 3x + 1$, $b = x^2 + 3x + 2$, τότε $a - b = x^2 - 1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 = 7(a - b)^3 &\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 7(a - b)^3 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 7a^2 + 14ab - 7b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(a - b)(6a^2 - 15ab + 6b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \text{ ή } a = 2b \text{ ή } 2a = b \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ή } -3x - 3 = 0 \text{ ή } 3x^2 + 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1. \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x + 1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

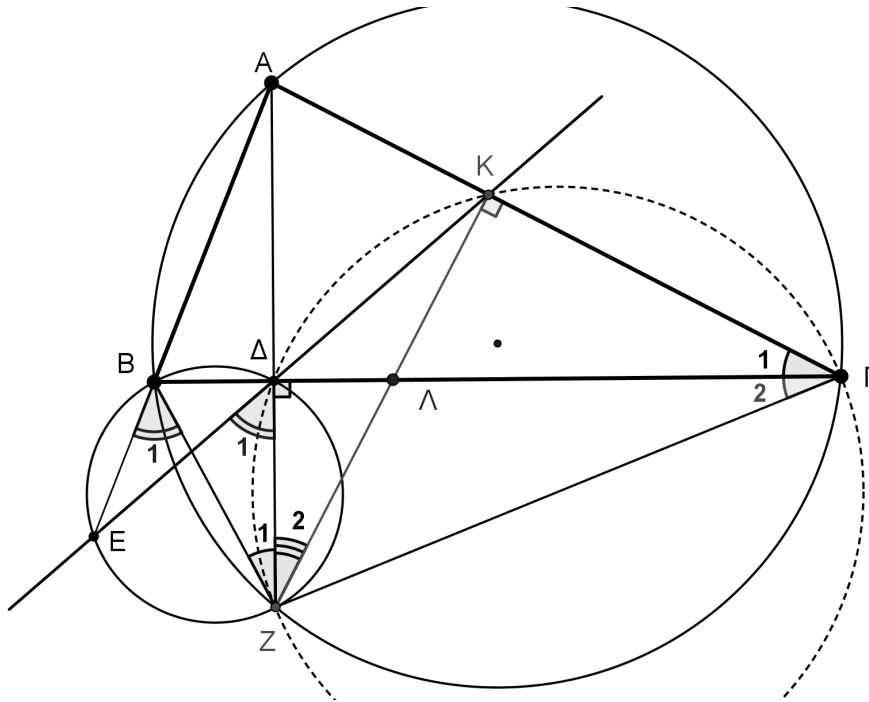
$$\begin{aligned} (x + 1)^3 \left[(2x + 1)^3 - (x + 2)^3 - 7(x - 1)^3 \right] &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \\ \text{ή } 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - x^3 - 6x^2 - 12x - 8 - 7x^3 + 21x^2 - 21x + 7 &= 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \text{ ή } 27x^2 - 27x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1. \end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E . Αν η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο K και η ευθεία ZK την $B\Gamma$ στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Lambda$.

Λύση

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABZ\Gamma$ έχουμε: $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Delta ZE$ έχουμε: $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο $\Delta K \Gamma Z$ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABZ\Gamma$ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, δηλαδή στο τρίγωνο $BZ\Lambda$ η $Z\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m , όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοσή τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

- α.** Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο 1^ο γύρο συμμετέχουν 2^m αθλητές, γίνονται 2^{m-1} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-1} νικητές.

Στο 2^ο γύρο συμμετέχουν 2^{m-1} αθλητές, γίνονται 2^{m-2} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-2} νικητές.

Στο 3^ο γύρο συμμετέχουν 2^{m-2} αθλητές, γίνονται 2^{m-3} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-3} νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο $m^ο$ γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν $2^{m-m+1} = 2^1 = 2$ αθλητές, γίνεται $2^{m-m} = 2^0 = 1$ αγώνας και ανακηρύσσεται $2^{m-m} = 2^0 = 1$ νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται m “γύροι” και $2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 2 + 1 = 2^m - 1$ αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

α. Αν τώρα ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε $m = 3k$, όπου k θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^m - 1 = 2^{3k} - 1 = (2^3)^k - 1 = 8^k - 1 = (8 - 1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \dots + 1) = 7n,$$

όπου n θετικός ακέραιος.

β. Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους m γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10 + 20 + 30 + \dots + (m \cdot 10) = 10(1 + 2 + 3 + \dots + m) = 10 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1) = 210 \Leftrightarrow m(m+1) = 42 \Leftrightarrow m = 6,$$

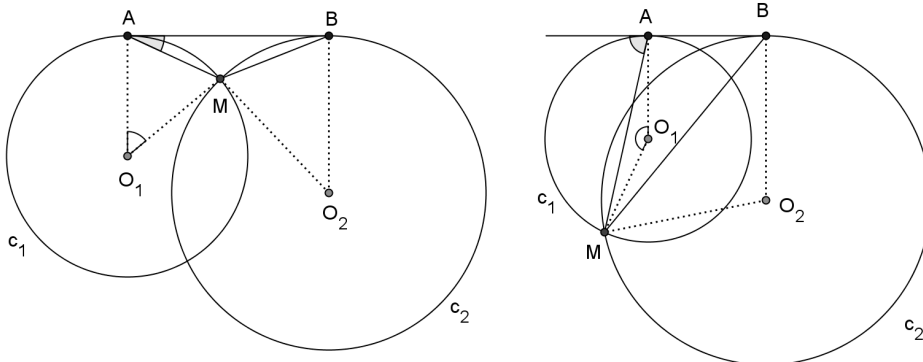
δηλαδή συμμετείχαν $2^6 = 64$ αθλητές.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1 = (O_1, r_1)$ και $c_2 = (O_2, r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των c_1, c_2 και ισχύει $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.

Λύση

Είναι $MA = 2r_1 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{MO_1A}}{2}\right)$ και $MB = 2r_2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{MO_2B}}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{MO_1A}}{2}\right)}{r_2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{MO_2B}}{2}\right)}. \quad (1)$$



Σχήμα 8

Η γωνία $\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}$ ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς $\widehat{M\hat{A}B}$ είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε $\eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}\right) = \eta\mu(\widehat{M\hat{A}B})$. Ομοίως, ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}\right) = \eta\mu(\widehat{M\hat{B}A})$ και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu(\widehat{M\hat{A}B})}{r_2 \cdot \eta\mu(\widehat{M\hat{B}A})} \quad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε $\frac{\eta\mu(\widehat{M\hat{A}B})}{\eta\mu(\widehat{M\hat{B}A})} = \frac{MB}{MA}$, οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot MB}{r_2 \cdot MA} \Rightarrow \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} < 1 \Rightarrow MA < MB.$$

Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).