



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
9. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **23 Φεβρουαρίου 2008** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτό και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί οι εθνικές ομάδες, που θα συμμετάσχουν στην **25<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΠΓΔΜ, Μάιος 2008)**, στην **12<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Αλβανία, Ιούνιος 2008)** και στην **49η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ισπανία, Ιούλιος 2008)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν αφιλοκερδώς στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

**11. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ μαζί με τα γραπτά να μας στείλει το ονοματεπώνυμο και την ταχ. Δ/ση όλων των επιτηρητών για να τους σταλεί ονομαστική ευχαριστήρια επιστολή από το Δ.Σ. της ΕΜΕ.**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος  
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

Αθήνα, 19 Ιανουαρίου 2008

Αγαπητοί μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) “ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”. Σήμερα δεν δίνετε τις συνηθισμένες εξετάσεις. Συμμετέχετε σε έναν αγώνα του πνεύματος. Και μόνο η απόφασή σας για συμμετοχή είναι μια επιτυχία. Με την ευκαιρία αυτής μας της επικοινωνίας θα θέλαμε να σας πληροφορήσουμε για τα εξής :

Στα περιοδικά της ΕΜΕ **Ευκλείδης Α΄** και **Ευκλείδης Β΄** δημοσιεύονται εκτός των άλλων θεμάτων ανά τάξη και θέματα με τις λύσεις τους από Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Επίσης έχουν εκδοθεί βιβλία της ΕΜΕ με τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, Βαλκανιάδων, Θεωρίας αριθμών και τα βιβλία με τα Θέματα των Ελληνικών Διαγωνισμών 1997-2007.

**Για το νέο έτος το Δ.Σ. της ΕΜΕ σας εύχεται ολόψυχα καλή χρονιά, προσωπική και οικογενειακή ευτυχία.**

## **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ.  
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος  
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι  $8x + 10y = 1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y.$$

Πρόβλημα 2.

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψηφίου φυσικού αριθμού  $a$  με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του  $a$ ;

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο  $ABC$  και ευθεία  $\varepsilon$  που περνάει από το  $C$  παράλληλη προς την πλευρά  $AB$ . Επιπλέον, δίνεται ότι

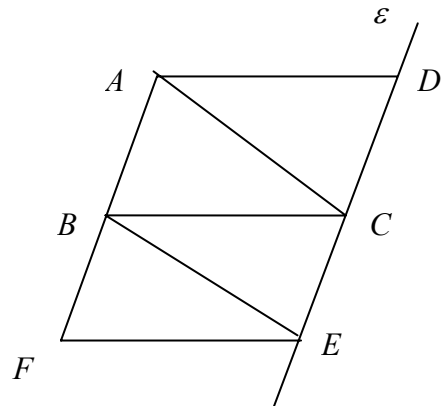
$$CD = CE = AB.$$

Στην προέκταση της  $AB$  προς το  $B$  παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $BF = AB$ .

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).

β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος  $AFED$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$ ;



Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής  $A = ababab$ , όπου  $a, b$  ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής  $A = ababab$ , όπου  $a, b$  ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008  
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

**Πρόβλημα 1**

Αν ισχύει ότι  $12b + 26a = 1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5}{12} - (24b + 52a)^{-2} - (72b + 156a)^{-1}.$$

**Πρόβλημα 2**

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το  $\frac{1}{2}$  των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

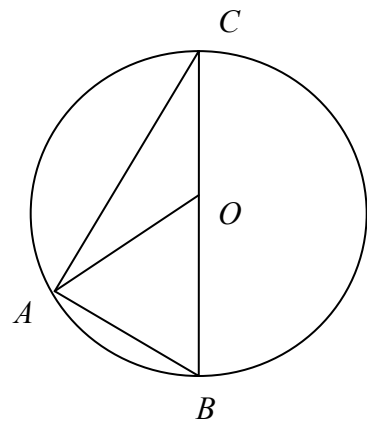
Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

**Πρόβλημα 3**

Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα  $BC$  είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον  $AB = 2\sqrt{7}$  και  $AC = 6$ .

- α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.  
β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου  $ABC$  που αντιστοιχούν στην πλευρά  $BC$ .  
γ) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και  $E_x$  είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου  $ABC$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



**Πρόβλημα 4**

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός  $A = abc$ , όπου  $a, b, c$  ψηφία με  $a > 0$ . Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος  $B$  που είναι μικρότερος από τον  $A$  κατά 396. Επιπλέον, αν από τον  $A$  αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του  $A$ . Να προσδιορίσετε τον αριθμό  $A$ .

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

## Α΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

### Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x - a)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές  $AB = 2a$  και  $AD = a$ . Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:

το άθροισμα  $\Delta M + M\Gamma$  είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

### Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί  $x, y, z$  είναι τέτοιοι ώστε  $x > 0, y + 1 > 0, z + 2 > 0$  και  $x + y + z = 3$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των  $x, y, z$  ισχύει η ισότητα;

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

## Β' τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 + 2 = 3\sqrt{3x - 2}.$$

### Πρόβλημα 2

Σε ένα “τουρνουά” ποδοσφαίρου συμμετέχουν  $n$  ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του “τουρνουά” ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός  $n$  των ομάδων που συμμετείχαν.

### Πρόβλημα 3

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y, z$  ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό  $m$  που είναι τέτοιος ώστε:

$$x + y + z + m \leq 0.$$

### Πρόβλημα 4.

Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  με  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ,  $ΑΔ = \alpha$  και  $ΑΒ = ΒΓ = 2\alpha$ .

- (i) Να αποδείξετε ότι:  $\Delta A + \Delta \Gamma < \Delta B + \Delta \Gamma$ .
- (ii) Να βρείτε σημείο  $M$  πάνω στην ευθεία  $ΑΒ$  για το οποίο το άθροισμα  $\Delta M + M\Gamma$  είναι το ελάχιστο δυνατό.
- (iii) Για το σημείο  $M$  που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta M\Gamma$ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

## Γ' τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Αν ο  $z$  είναι μιγαδικός με  $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$  και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:  $|z|=1$ .

### Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^3 + 3xy + y^3 = 1 \\ x^3 - x^2 = y^3 - y^2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία  $\alpha_n$  με  $n \in \mathbb{N}^*$ , για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 2n + 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

### Πρόβλημα 4

Έστω  $\Sigma$  εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ . Οι ευθείες  $A\Sigma$ ,  $B\Sigma$  και  $\Gamma\Sigma$  τέμνουν τις πλευρές  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $A'$ ,  $B'$  και  $\Gamma'$  αντίστοιχα, ώστε  $\Sigma A' \leq A\Sigma$ ,  $\Sigma B' \leq B\Sigma$  και  $\Sigma \Gamma' \leq \Gamma\Sigma$ .

Αν θέσουμε  $x = (\Sigma AB)$ ,  $y = (\Sigma B\Gamma)$  και  $z = (\Sigma A\Gamma)$ , να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + 2y^2 z^2.$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008 ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

## Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι  $8x + 10y = 1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y.$$

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

$$\begin{aligned} A &= 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y \\ &= 2008 - 2 \cdot 2 \cdot (4x + 5y) - 6 \cdot (8x + 10y) \\ &= 2008 - 2 \cdot (8x + 10y) - 6 \cdot (8x + 10y) = 2008 - 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 2000. \end{aligned}$$

### (2<sup>ος</sup> τρόπος)

$$\begin{aligned} A &= 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y \\ &= 2008 - 16x - 20y - 48x - 60y \\ &= 2008 - 64x - 80y = 2008 - 8(8x + 10y) = 2008 - 8 \cdot 1 = 2000. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψηφίου φυσικού αριθμού  $a$  με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αριθμού  $a$ ;

### Λύση

Αν  $\pi$  είναι το πηλίκο και  $\nu$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε  $\pi = 6\nu + 5$  και

$$a = 5(6\nu + 5) + \nu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\} \Leftrightarrow a = 31\nu + 25, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Η τιμή  $\nu = 0$  αποκλείεται γιατί η διαίρεση είναι ατελής.

- Για  $\nu = 1$ , λαμβάνουμε  $a = 31 \cdot 1 + 25 = 56$ .
- Για  $\nu = 2$ , λαμβάνουμε  $a = 31 \cdot 2 + 25 = 87$ .
- Για  $\nu = 3$ , λαμβάνουμε  $a = 31 \cdot 3 + 25 = 118$
- Για  $\nu = 4$ , λαμβάνουμε  $a = 31 \cdot 4 + 25 = 149$ .

Άρα οι δυνατές τιμές του τριψηφίου αριθμού  $a$  είναι :  $a = 118$  ή  $a = 149$ .

### Πρόβλημα 3

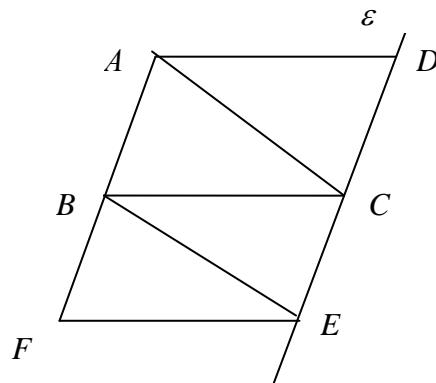
Δίνεται το τρίγωνο  $ABC$  και η ευθεία  $\varepsilon$  που περνάει από το  $C$  και είναι παράλληλη προς την πλευρά  $AB$ . Επιπλέον δίνεται ότι

$$CD = CE = AB.$$

Στην προέκταση της  $AB$  προς το  $B$  παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $BF = AB$ .

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

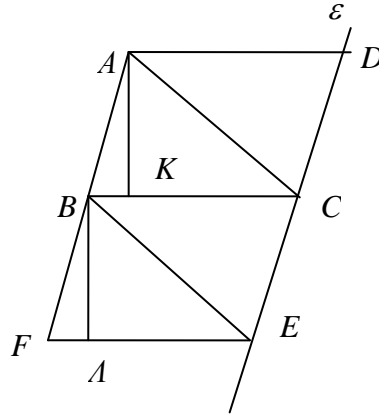




β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος  $AFED$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$ ;

### Λύση

α) Τα τετράπλευρα  $ABCD$  και  $BFEC$  έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Άρα θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή είναι  $AD = BC = FE$ . Έτσι τα τρίγωνα  $ABC, BFE, BEC$  και  $ACD$  έχουν ίσες βάσεις.



Τα τρίγωνα  $ABC$  και  $ACD$  έχουν προς τις ίσες βάσεις τους ύψη ίσα προς το ύψος του παραλληλογράμμου  $ABCD$  ως προς τη βάση  $BC$ . Ομοίως τα ύψη των τριγώνων  $BFE, BEC$  προς τις ίσες βάσεις τους είναι ίσα. Επιπλέον, αν  $AK \perp BC$  και  $BA \perp FE$ , τότε τα τρίγωνα  $ABK$  και  $BFA$  είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες και  $\hat{ABK} = \hat{BFA}$  (εντός εναλλάξ στις παράλληλες  $BC, FE$  με τέμνουσα τη  $BF$ ). Άρα θα έχουν και  $AK = BA$ . Επομένως τα τρίγωνα  $ABC, BFE, BEC$  και  $ACD$  έχουν ίσα ύψη προς τις ίσες βάσεις τους, οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

(β) Επειδή  $E_{AFED} = E_{ABC} + E_{ACD} + E_{BFE} + E_{BEC} = 4E_{ABC}$  έπεται ότι

$$\frac{E_{ABC}}{E_{AFED}} = \frac{E_{ABC}}{4E_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

### Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής  $A = ababab$ , όπου  $a, b$  ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής  $A = ababab$ , όπου  $a, b$  ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

### Λύση

(α) Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού  $A$  είναι ο αριθμός

$$\Sigma(A) = a + b + a + b + a + b = 3 \cdot a + 3 \cdot b = 3 \cdot (a + b),$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε ο αριθμός  $A$  διαιρείται με το 3.

(β) Για να διαιρείται ο αριθμός  $A$  με το 5, πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του  $b$  να είναι 0 ή 5. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν  $b=0$ , τότε  $\Sigma(A)=3\cdot(a+0)=3\cdot a$ . Επομένως ο αριθμός  $A$  διαιρείται με το 9, όταν ο  $3\cdot a$  είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο  $a$  είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν  $a \in \{3,6,9\}$ , οπότε προκύπτουν οι αριθμοί  $A=303030$  ή  $A=606060$  ή  $909090$ .
- Αν  $b=5$ , τότε το άθροισμα των ψηφίων του  $A$  είναι  $\Sigma(A)=3\cdot(a+5)$  και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν  $a+5 \in \{3,6,9,12\}$ , οπότε αφού  $1 \leq a \leq 9$  έπεται ότι  $a \in \{1,4,7\}$ . Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί  $A=151515$  ή  $A=454545$  ή  $A=757575$ .

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι  $12b+26a=1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5}{12} - (24b+52a)^{-2} - (72b+156a)^{-1}.$$

### Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{12} - (24b+52a)^{-2} - (72b+156a)^{-1} \\ &= \frac{5}{12} - [2\cdot(12b+26a)]^{-2} - [6(12b+26a)]^{-1} \\ &= \frac{5}{12} - (2\cdot 1)^{-2} - (6\cdot 1)^{-1} = \frac{5}{12} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 0. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2.

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το  $\frac{1}{2}$  των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

### Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για  $\frac{1}{2}\cdot 12 + 2 = 8$  ημέρες.

Αν  $x, y$  και  $z$  είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε  $x=12\lambda$ ,  $y=10\lambda$ ,  $z=8\lambda$  και έχουμε

$$x + y + z = 3000 \Leftrightarrow 12\lambda + 10\lambda + 8\lambda = 3000 \Rightarrow \lambda = 100.$$

Άρα έχουμε:

$\frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 12 \cdot 100 = 1200$  ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το πρώτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3600 ευρώ.

$\frac{y}{10} = 100 \Rightarrow y = 12 \cdot 100 = 1000$  ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το δεύτερο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3000 ευρώ.

$\frac{z}{8} = 100 \Rightarrow z = 8 \cdot 100 = 800$  ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το τρίτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 2400 ευρώ.

### Πρόβλημα 3

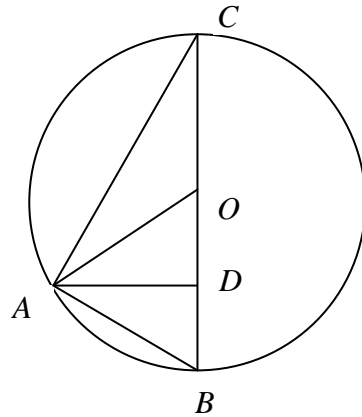
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα  $BC$  είναι διάμετρος του κύκλου και είναι ακόμα  $AB = 2\sqrt{7}$  και  $AC = 6$ .

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου  $ABC$  που αντιστοιχούν στην πλευρά  $BC$ .

γ) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και  $E_x$  είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου  $ABC$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



### Λύση

α) Επειδή είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ , από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + (2\sqrt{7})^2 = 36 + 4 \cdot 7 = 64.$$

Άρα είναι  $BC = 8$ .

β) Η διάμεσος  $AO$  ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι  $AO = \frac{8}{2} = 4$ .

Για την εύρεση του ύψους  $AD$  χρησιμοποιούμε τους τύπους για το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου  $ABC$  και έχουμε:

$$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow 8 \cdot AD = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έχουμε  $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ .

Η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου  $ABC$  έχει εμβαδόν  $E_x = E - (ABC) = 16\pi - \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 16\pi - 6\sqrt{7}$ , οπότε

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{16\pi - 6\sqrt{7}}{16\pi} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 48\pi - 18\sqrt{7} > 32\pi \Leftrightarrow 16\pi > 18\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow 8\pi > 9\sqrt{7} \Leftrightarrow 64\pi^2 > 81 \cdot 7 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{567}{64},$$

που ισχύει, γιατί είναι  $\pi^2 = 3,14^2 > 3^2 = 9$ , ενώ  $\frac{567}{64} < 9$ .

#### Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός  $A = abc$ , όπου  $a, b, c$  ψηφία με  $a \neq 0$ . Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος  $B$  που είναι μικρότερος από τον  $A$  κατά 396. Επιπλέον, αν από τον  $A$  αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του  $A$ . Να βρείτε τον αριθμό  $A$ .

#### Λύση

Είναι  $A = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ , οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός  $B = \overline{cba} = 100c + 10b + a$ , οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} A - B = 396 &\Leftrightarrow 99(a - c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4 \\ &\Leftrightarrow c = a - 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\begin{aligned} A - 41 = 50(a + b + c) &\Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c \\ &\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41, \end{aligned}$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a - 4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \quad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος  $a$  είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε  $b = 4$ . Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει  $a = 5$  και  $c = 1$ .

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο  $A = 541$ .

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

#### Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} K &= (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - 6x^2y - y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - y^3 \\ &= y^3. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 A &= 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64 \\
 &= (200000 + 4)^3 - (200000 - 4)^3 - 6 \cdot 200000^2 \cdot 4 - 4^3,
 \end{aligned}$$

οπότε, αν θέσουμε  $x = 200000$  και  $y = 4$  στην προηγούμενη παράσταση, αυτή γίνεται  $A = y^3 = 4^3$ .

### Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x - a)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0.$$

#### Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2^2 - ab - 2a - 2b = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-2)^2 + (2-a)^2] = 0 \\
 &\Leftrightarrow a - b = b - 2 = 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = b = 2.
 \end{aligned}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}
 (2x - a)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0 &\Leftrightarrow (2x - 2)^3 - (x - 2)^3 - x^3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2x - 2)^3 + (2 - x)^3 + (-x)^3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3(2x - 2)(2 - x)(-x) = 0,
 \end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι  $(2x - 2) + (2 - x) + (-x) = 0$ , όπως προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα των κύβων. Η τελευταία παραγοντοποίηση μπορεί επίσης να προκύψει εύκολα, μετά από πράξεις.

Άρα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

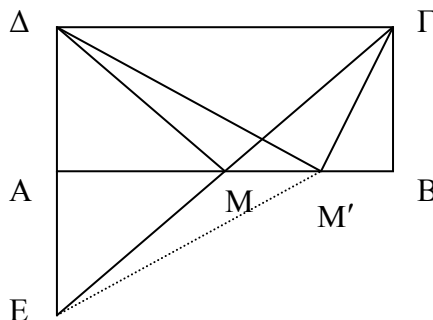
$$(2x - 2)(2 - x)(-x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \text{ ή } 2 - x = 0 \text{ ή } -x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 0.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρές  $AB = 2\alpha$  και  $A\Delta = \alpha$ . Να αποδείξετε ότι το μέσον  $M$  της πλευράς  $AB$  έχει την ιδιότητα :

το άθροισμα  $\Delta M + M\Gamma$  είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου  $M$  πάνω στην ευθεία  $AB$ .

#### Λύση



Το τρίγωνο MBΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ( $MB = BΓ = \alpha$ ), οπότε  $\widehat{BΜΓ} = 45^\circ$ .  
Επειδή είναι

$$\widehat{\Delta AM} + \widehat{AMΓ} = 90^\circ + 180^\circ - \widehat{AMΓ} = 225^\circ > 180^\circ,$$

η προέκταση της ΓΜ τέμνει την προέκταση της ΔΑ προς το Α, έστω στο σημείο Ε.  
Τα τρίγωνα MBΓ και ΜΑΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν  $MA = MB$   
και  $\widehat{AMΕ} = \widehat{BΜΓ}$  (ως κατά κορυφή). Άρα θα έχουν και

$$AE = BΓ = AΔ = \alpha.$$

Τότε όμως και τα τρίγωνα AMΔ και AMΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στο Α και  
έχουν την πλευρά AM κοινή και  $AE = AΔ$ . Άρα θα έχουν και  $ΔM = EM$ , οπότε

$$\Delta M + MΓ = EM + MΓ = EΓ. \quad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν σημείο  $M'$  της ευθείας AB διαφορετικό από το σημείο M. Τότε  
προφανώς τα ορθογώνια τρίγωνα  $AM'Δ$  και  $AM'E$  είναι ίσα, οπότε θα έχουν  
 $AM' = EM'$  και

$$\Delta M' + M'Γ = EM' + M'Γ. \quad (2)$$

Επειδή η γραμμή  $EM'Γ$  είναι τεθλασμένη, ενώ η γραμμή EΜΓ είναι ευθεία που έχει  
τα ίδια άκρα με την τεθλασμένη  $EM'Γ$ , από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Delta M + MΓ = EΓ < EM' + M'Γ = ΓM' + M'Δ.$$

#### Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί  $x, y, z$  είναι τέτοιοι ώστε  $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$  και  $x+y+z=3$ , να  
αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των  $x, y, z$  ισχύει η ισότητα;

#### Λύση

Επειδή τα κλάσματα του πρώτου μέλους της ζητούμενης ανισότητας παρουσιάζουν  
στον αριθμητή το άθροισμα δύο θετικών αριθμών και στον παρανομαστή το γινόμενο  
τους, θεωρούμε τη γνωστή ανισότητα

$$(a+b)^2 \geq 4ab, \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

η οποία αληθεύει, αφού είναι ισοδύναμη με την προφανή ανισότητα  $(a-b)^2 \geq 0$ . Η  
ισότητα αληθεύει όταν  $a=b$ . Για  $a, b$  θετικούς, από την (1) λαμβάνουμε

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \quad (2)$$

ενώ η ισότητα αληθεύει όταν  $a=b$ .

Από την (2) για  $a=x, b=y+1$  λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} \leq \frac{x+y+1}{4} \quad (3)$$

και ομοίως προκύπτουν οι ανισότητες

$$\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} \leq \frac{y+z+3}{4}, \quad (4)$$

$$\frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{x+z+2}{4}. \quad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{4}$$

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{2 \cdot 3 + 6}{4} = 3.$$

Η ισότητα αληθεύει όταν  $x = y+1 = z+2$ , οπότε από την σχέση  $x+y+z=3$  προκύπτει ότι  $x+x-1+x-2=3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$  και  $y=1, z=0$ .

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 + 2 = 3\sqrt{3x-2}.$$

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Θα αναζητήσουμε λύσεις που ικανοποιούν την ανίσωση

$$3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(x^2 + 2)^2 = 9(3x-2) \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 27x + 22 = 0. \quad (1)$$

Οι πιθανές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι : 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ο ακέραιος 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και μέσω του σχήματος Horner καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)(x^3 + x^2 + 5x - 22) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι το σχήμα Horner για  $x=2$ , για το πολυώνυμο  $x^3 + x^2 + 5x - 22$  καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)(x+2)(x^2 + 3x + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2 + 3x + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$

αφού το τριώνυμο  $x^2 + 3x + 11 = 0$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = -35 < 0$ .

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Ομοίως πρέπει  $x \geq \frac{2}{3}$ . Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$y = \sqrt{3x-2}, \text{ για } x \geq \frac{2}{3}.$$

Τότε λαμβάνουμε

$$y \geq 0 \text{ και } y^2 = 3x-2,$$

ενώ η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$x^2 + 2 = 3y.$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 = 3y - 2 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases} \text{ με } x \geq \frac{2}{3} \text{ και } y \geq 0.$$

Με αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^2 - y^2 = 3(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ή } x + y = -3.$$

Η εξίσωση  $x + y = -3$  είναι αδύνατη λόγω των περιορισμών  $x \geq \frac{2}{3}$  και  $y \geq 0$ .

Για  $x = y$  έχουμε την εξίσωση

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

## Πρόβλημα 2

Σε ένα “τουρνουά” ποδοσφαίρου συμμετέχουν  $n$  ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμός. Αν στο τέλος του “τουρνουά” ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός  $n$  των ομάδων που συμμετείχαν.

### Λύση

Έστω ότι συμμετέχουν  $n$  ομάδες.

Η 1<sup>η</sup> ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες  $n - 1$  ομάδες, οπότε διεξάγονται  $n - 1$  αγώνες.

Η 2<sup>η</sup> ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες  $n - 2$  ομάδες, οπότε διεξάγονται  $n - 2$  αγώνες.

Η 3<sup>η</sup> ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες  $n - 3$  ομάδες, οπότε διεξάγονται  $n - 3$  αγώνες.

.....  
 Η  $(n - 1)$ <sup>η</sup> ομάδα παίζει με την τελευταία 1 ομάδα, οπότε διεξάγεται 1 αγώνας.

Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1). \quad (1)$$

Αν γράψουμε τις ισότητες

$$\Sigma = 1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1)$$

$$\Sigma = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$$

και τις προσθέσουμε κατά μέλη, τότε λαμβάνουμε

$$2\Sigma = (n - 1)[(n - 1) + 1] = (n - 1)n \Rightarrow \Sigma = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Σε κάθε αγώνα ο συνολικός αριθμός των βαθμών που δίνονται στις δύο ομάδες που συμμετέχουν (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα) είναι 4. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\frac{364}{4} = 91. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{(n - 1)n}{2} = 91 \Leftrightarrow \frac{(n - 1)n}{2} = 7 \cdot 13 \Leftrightarrow \frac{(n - 1)n}{2} = \frac{13 \cdot 14}{2} \Leftrightarrow n = 14.$$

Άρα συμμετείχαν 14 ομάδες.

## Πρόβλημα 3.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y, z$  ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0,$$

να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό  $m$  που είναι τέτοιος ώστε:

$$x + y + z + m \leq 0.$$



**Λύση**

Έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$$

και θέτοντας  $a = x+1$ ,  $\beta = y+2$  και  $\gamma = z+3$ , έχουμε τελικά

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Ισχύει όμως η ανισότητα

$$3(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (a + \beta + \gamma)^2,$$

που είναι ισοδύναμη με τη γνωστή ανισότητα  $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq a\beta + a\gamma + \beta\gamma$ .Η ισότητα ισχύει όταν  $a = \beta = \gamma$ .

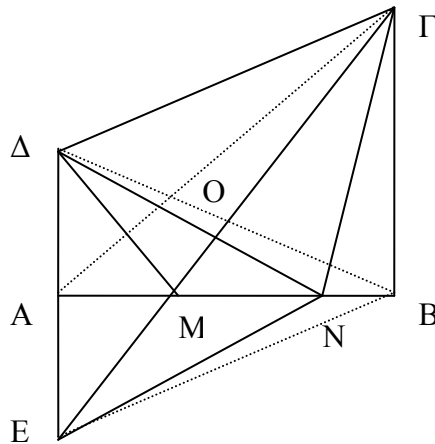
Επομένως έχουμε

$$(a + \beta + \gamma)^2 \leq 3 \cdot 1 \Leftrightarrow |a + \beta + \gamma| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow |x + y + z + 6| \leq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x + y + z + 6 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} - \sqrt{3} \leq x + y + z + 6 - \sqrt{3} \leq 0.$$

Επειδή η ισότητα ισχύει για  $x+1 = y+2 = z+3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , έπεται ότι ο ζητούμενοςμέγιστος θετικός αριθμός είναι ο  $m = 6 - \sqrt{3}$ .**Πρόβλημα 4**Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ,  $A\Delta = \alpha$  και  $AB = B\Gamma = 2\alpha$ .

- (i) Να αποδείξετε ότι:  $\Delta A + A\Gamma < \Delta B + B\Gamma$ .
- (ii) Να βρείτε σημείο  $M$  πάνω στην ευθεία  $AB$  για το οποίο το άθροισμα  $\Delta M + M\Gamma$  είναι το ελάχιστο δυνατό.
- (iii) Για το σημείο  $M$  που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta M\Gamma$ .

**Λύση**

(i) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε  $\Delta A + A\Gamma = \alpha + 2\alpha\sqrt{2} = \alpha(1 + 2\sqrt{2})$ ,  $\Delta B + B\Gamma = \alpha\sqrt{5} + 2\alpha = \alpha(2 + \sqrt{5})$ , οπότε

$$\Delta A + A\Gamma < \Delta B + B\Gamma \Leftrightarrow \alpha(1 + 2\sqrt{2}) < \alpha(2 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 8 < 6 + 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5}, \text{ που ισχύει.}$$

(ii) Αν Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΑΒ και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ, τότε  $\Delta M = ME$  και

$$\Delta M + M\Gamma = EM + M\Gamma = E\Gamma. \quad (1)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχόν σημείο Ν πάνω στην ευθεία ΑΒ, διαφορετικό από το Μ, οπότε θα ισχύει  $\Delta N = NE$  και

$$\Delta N + N\Gamma = EN + N\Gamma. \quad (2)$$

Επειδή η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία, ενώ η γραμμή ΕΝΓ έχει τα ίδια άκρα με την ΕΜΓ και είναι τεθλασμένη, έπεται ότι

$$\Delta M + M\Gamma = E\Gamma < EN + N\Gamma = \Delta N + N\Gamma.$$

Άρα το σημείο Μ είναι τέτοιο ώστε το άθροισμα  $\Delta M + M\Gamma$  να είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Επειδή είναι  $\Delta E = 2\alpha = B\Gamma$  και  $\Delta E \perp AB, B\Gamma \perp AB \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$ , το τετράπλευρο ΔΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν οι διαγώνιοι του ΔΕΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε το Ο είναι το μέσον της ΔΒ και η ΕΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ. Επίσης η ΑΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ, αφού ισχύει  $A\Delta = AE = \alpha$ . Άρα το σημείο τομής Μ των δύο διαμέσων του τριγώνου ΔΕΒ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΕΒ, οπότε θα ισχύει:

$$AM = \frac{AB}{3} = \frac{2\alpha}{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta M\Gamma) = (\Delta E\Gamma) - (\Delta EM) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot 2\alpha - \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.$$

Διαφορετικά έχουμε

$$\begin{aligned} MB &= 2\alpha - \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha}{3} \text{ και} \\ (\Delta M\Gamma) &= (AB\Gamma\Delta) - (\Delta AM) - (MB\Gamma) \\ &= \frac{(\alpha + 2\alpha) \cdot 2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{2\alpha}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{4\alpha}{3} \\ &= 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{4\alpha^2}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}. \end{aligned}$$

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1** Εάν ο  $z$  είναι μιγαδικός με  $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \neq 0$  και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι  $|z|=1$ .

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

Αν θέσουμε

$$w = \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3},$$

τότε έχουμε

$$w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} = \frac{6\bar{z}^4 + 5\bar{z}^2 + 6}{3\bar{z}^4 + \bar{z}^2 + 3},$$

η οποία μετά από τις πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $z\bar{z} = |z|^2$  καταλήγει στην ισότητα

$$\left(|z|^4 - 1\right)\left(z^2 - \bar{z}^2\right) = 0 \Rightarrow |z| = 1,$$

αφού λόγω της υπόθεσης  $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \neq 0$  έπεται ότι  $z^2 - \bar{z}^2 \neq 0$ .

### (2<sup>ος</sup> τρόπος)

Εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε,

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} = 2 + \frac{3z^2}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R}$$

δηλαδή ισοδύναμα

$$\frac{3z^2}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3z^4 + z^2 + 3}{3z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \bar{z}^2 + \frac{1}{\bar{z}^2} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 - \left(\frac{1}{\bar{z}^2} - \frac{1}{z^2}\right) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - \bar{z}^2) \left(1 - \frac{1}{|z|^4}\right) = 0.$$

Όμως, λόγω της υπόθεσης  $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \neq 0$  έπεται ότι  $z^2 - \bar{z}^2 \neq 0$ , οπότε τελικά λαμβάνουμε  $|z|^4 = 1 \Rightarrow |z| = 1$ .

### Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^3 + 3xy + y^3 = 1 \\ x^3 - x^2 = y^3 - y^2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

### Λύση

Η εξίσωση  $x^3 + 3xy + y^3 = 1$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^3 + y^3 + (-1)^3 = 3xy(-1),$$

η οποία από την ταυτότητα του Euler είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις

$$x + y - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x = y = -1.$$

Άρα έχουμε

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 - x^2 = y^3 - y^2 \end{cases} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = y = -1 \\ x^3 - x^2 = y^3 - y^2 \end{cases} (\Sigma_2).$$

Το σύστημα  $(\Sigma_2)$  έχει τη λύση  $(x, y) = (-1, -1)$ , ενώ

$$(\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 - y^3 - (x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 - x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^2 - xy - (x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ή} \quad (x, y) = (1, 0) \quad \text{ή} \quad (x, y) = (0, 1).$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία  $\alpha_n$  με  $n \in \mathbb{N}^*$ , για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 2n + 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* .$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

#### Λύση

Εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση  $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 2n + 1$ , για  $n = 1, 2, \dots, (n-1)$  έχουμε:

$$\text{Για } n = 1 \text{ έχουμε } \alpha_2 - \alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$\text{Για } n = 2 \text{ έχουμε } \alpha_3 - \alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1$$

.....

$$\text{Για } n-1 \text{ έχουμε: } \alpha_n - \alpha_{n-1} = 2(n-1) + 1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες λαμβάνουμε:

$$\alpha_n - \alpha_1 = 2(1+2+3+\dots+(n-1)) + n - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_1 = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_1 = n(n-1) + n - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = n^2 - 1 + \alpha_1. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = n^2 - \ell, \text{ όπου } \ell = 1 - \alpha_1. \quad (2)$$

Για το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_m \cdot \alpha_{m+1} &= (m^2 - \ell)((m+1)^2 - \ell) = (m^2 - \ell)(m^2 + 2m + 1 - \ell) = \\ &= m^4 + 2m^3 + m^2 - \ell m^2 - \ell m^2 - 2\ell m - \ell + \ell^2 = \\ &= \underbrace{m^4 + m^2 + \ell^2 + 2m^3 - 2\ell m^2 - 2\ell m - \ell}_{(m^2 + m - \ell)^2} - \ell = \alpha_{m^2+m-\ell}. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 4

Έστω  $\Sigma$  εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ . Οι ευθείες  $A\Sigma$ ,  $B\Sigma$  και  $\Gamma\Sigma$  τέμνουν τις πλευρές  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $A'$ ,  $B'$  και  $\Gamma'$  αντίστοιχα, ώστε  $\Sigma A' \leq A\Sigma$ ,  $\Sigma B' \leq B\Sigma$  και  $\Sigma \Gamma' \leq \Gamma\Sigma$ .

Αν θέσουμε  $x = (\Sigma AB)$ ,  $y = (\Sigma B\Gamma)$  και  $z = (\Sigma A\Gamma)$ , να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2.$$

#### Λύση

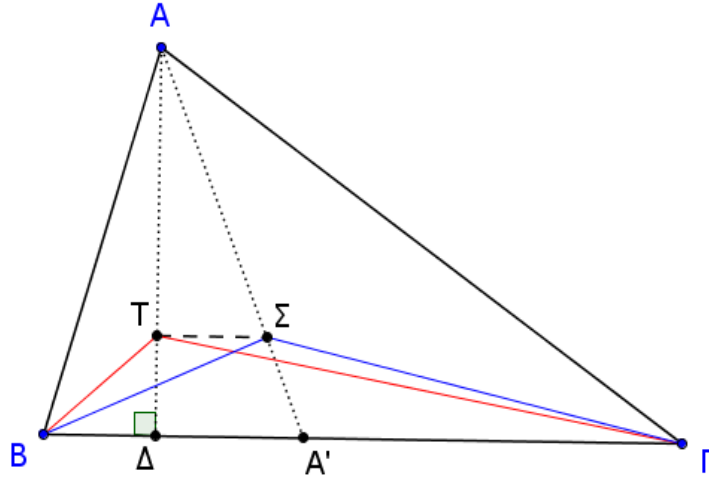
Από το δεδομένο σημείο  $\Sigma$  θεωρούμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  που τέμνει το ύψος  $AA'$  στο σημείο  $T$ . Τότε προφανώς  $(\Sigma B\Gamma) = (TB\Gamma)$ .

Από τη σχέση  $\Sigma A' \leq A\Sigma$  προκύπτει προφανώς

$$T\Delta \leq TA. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} T\Delta \cdot \Delta B \leq TA \cdot \Delta B &\Leftrightarrow \frac{1}{2} T\Delta \cdot \Delta B \leq \frac{1}{2} TA \cdot \Delta B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (T\Delta B) \leq (TAB). \end{aligned} \quad (2)$$



Από τη σχέση (1) έχουμε επίσης:

$$\begin{aligned} T\Delta \cdot \Delta\Gamma \leq TA \cdot \Delta\Gamma &\Leftrightarrow \frac{1}{2} T\Delta \cdot \Delta\Gamma \leq \frac{1}{2} TA \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (T\Delta\Gamma) \leq (TA\Gamma) \end{aligned} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} (T\Delta B) + (T\Delta\Gamma) &\leq (TAB) + (TA\Gamma) \Leftrightarrow (TB\Gamma) \leq (TAB) + (TA\Gamma) \\ &\Leftrightarrow (TB\Gamma) \leq (AB\Gamma) - (TB\Gamma) \end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση  $(\Sigma B\Gamma) = (TB\Gamma)$ , παίρνουμε τελικά :

$$(\Sigma B\Gamma) \leq (AB\Gamma) - (\Sigma B\Gamma) \Leftrightarrow (\Sigma B\Gamma) \leq (\Sigma AB) + (\Sigma A\Gamma).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι:

$$(\Sigma AB) \leq (\Sigma B\Gamma) + (\Sigma A\Gamma) \text{ και } (\Sigma A\Gamma) \leq (\Sigma AB) + (\Sigma B\Gamma).$$

Επειδή έχουμε θέσει  $x = (\Sigma AB)$ ,  $y = (\Sigma B\Gamma)$  και  $z = (\Sigma A\Gamma)$ , από τις τρεις τελευταίες ανισώσεις, έχουμε:

$$0 < x \leq y + z, \quad 0 < y \leq x + z \text{ και } 0 < z \leq x + y. \quad (4)$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &\leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - (2xz)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + z^2 - y^2)^2 - (2xz)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + z^2 + 2xz - y^2) \cdot (x^2 + z^2 - 2xz - y^2) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x+z)^2 - y^2) \cdot ((x-z)^2 - y^2) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+y+z) \cdot (x+z-y)(x+y-z) \cdot (x-y-z) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+y+z) \cdot (x+z-y)(x+y-z) \cdot (y+z-x) &\geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει, λόγω των σχέσεων (4).