Επαναληπτικά θέματα Γ Λυκείου Θ-Τ

1. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 0$ και $w \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $z^2 + w^2 = 0$.

i. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{w} \in I$.

ii. Αν $|z-1| = 5$ και η εικόνα του $\frac{z}{w}$ είναι στον Oy να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $w^2 - |z| - 2wi = 6$.

iv. Για τους μιγαδικούς του z , w του ερωτηματος ii να δείξετε ότι $|z - w| \leq 6\sqrt{2}$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}.dt$ όπου $t > 0$ και η $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ με $x > 0$.

i. Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{1}{2}.\ln^2 x$ όπου $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε την g(x) ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g(x) και την εφαπτομένη της στο σημείο A(1,0).

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ της g(x) της $h(x) = \ln(x-2)$ και της ευθείας y=2.

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \Re$ για την οποία ισχύει

$$x.f'(x) - 7x = 2\int_1^x \ln t.dt - f(x) - 4 \text{ και } f(1) = 0.$$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = x.\ln x + 2x - 2$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε το πεδίο τιμών της f και να δείξετε ότι η f(x)=0 έχει μία μόνο θετική ρίζα.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της f(x) , του άξονα y'y και της $g(x) = x^3 - 1$.

Επιμέλεια: Δ.Βασιλόπουλος – Β.Κράνιας

4. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ με $f(0)=1$ και ο μιγαδικός $z=f(x)+\int_0^1 f(t).dt+x.f'(x).i$ με $x\geq 0$.

i. Αν για τον z ισχύει $|z-2|=|z-2i|$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0}[f(x).\ln x]$

iv. Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ της f(x) και της $g(x)=x^2+4$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x)=f(x)$ η οποία διέρχεται από το σημείο Α(0,-1).

i. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-\dfrac{2}{e^x}$ για κάθε $x\in\Re$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε ότι έχει μία μόνο θετική ρίζα.

iii. Θεωρούμε την $g(x)=x.\ln x$ με $g:(0,+\infty)\to\Re$.

a) Να μελετήσετε την $h(x)=f(g(x))-\dfrac{2}{x^x}$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

b) Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}.\dfrac{e+1}{e}\leq\int_{\frac{1}{e}}^{1}x^x.dx\leq\dfrac{e-1}{e}$ για κάθε $x\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύουν $(f\circ g)(x)=x+\ln(x+1)$, $g(x)=\ln(x+1)$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f(x).

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f^{-1}(x)$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία x=e.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με τύπο $f(x)=e^x.(x-1)+2\ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο τιμών της f.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2013$ έχει μία μόνο λύση.

iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)+f'(x)\leq 2xe^x+x^2-1$