



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

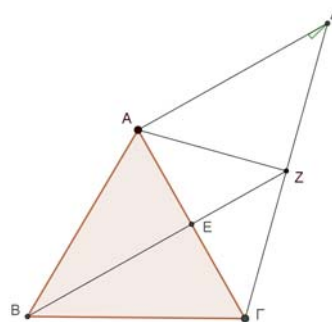
$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ = α κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

(α) Να αποδείξετε ότι ΖΑ = ΖΓ.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΒ.



Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
 77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
 12 Νοεμβρίου 2016

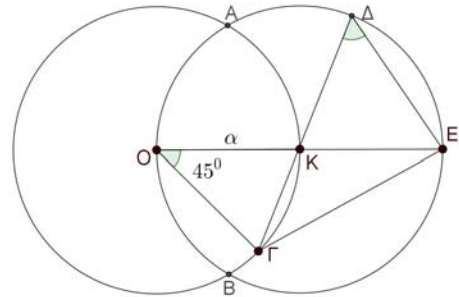
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$ και $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$, να βρείτε την αριθμητική

τιμή της παράστασης: $A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$.

Πρόβλημα 2.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = a$ και δύο κύκλοι ακτίνας a που έχουν κέντρα στα σημεία O και K , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο KB και η ευθεία ΓK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας a στο σημείο Δ . Η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας a στο σημείο E . Αν είναι $\hat{K}\hat{O}\hat{\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :



- (α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{K}\hat{\Delta}\hat{E}$, και
 (β) το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma E$ συναρτήσει του a .

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$.

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}$, $\frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a, b, c, d .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
 Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19. \quad (1)$$

$$\frac{2x - 1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x - 21}{9} \quad (2)$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$, $n \geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στο ύψος AM θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma = MK$. Με βάση την AK κατασκευάζουμε τετράγωνο $AKEZ$ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την AM , που περιέχει το B) και ισόπλευρο τρίγωνο $AK\Delta$ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την AM , που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔE και ΓZ , τέμνονται πάνω στην AB .

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k , ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2$$

είναι πρώτος.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο Δ στη διάμεσό του AM τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma = M\Delta$. Με βάση την $A\Delta$ κατασκευάζουμε τετράγωνο $A\Delta E Z$ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την AM , που περιέχει το Γ). Αν K είναι το σημείο τομής των AE και ΓZ , να αποδείξετε ότι η MK είναι παράλληλη στην ΔZ .

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)(2\alpha + 7)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha + 4}{\alpha}}.$$

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ x + \frac{1}{x} - w = 2, \quad y + \frac{1}{y} - w = 2, \quad z + \frac{1}{z} + w = 2, \quad y + \frac{1}{z} + w = 2 \right\}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και τα σημεία της A, B και Γ με τετμημένες α, β και γ , αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του ω .

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 45^\circ$. Στο ύψος $A\Delta$ θεωρούμε σημείο K ώστε $\Delta B = \Delta\Gamma = \Delta K$. Οι προεκτάσεις των υψών BE και ΓZ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$, στα σημεία M και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία N, K και M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολύωνμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9, P(4) = 16$.

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $A = 14^7 + 14^2 + 1$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες