Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 70

Γενικές ασκήσεις 3^{ου} Κεφαλαίου

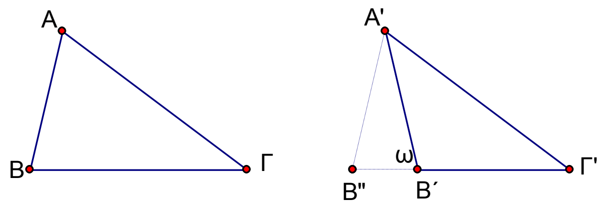
1.

Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ τέτοια ώστε ΑΓ = Α΄Γ΄, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner$.

i) Να αποδείξετε ότι ΑΒ= Α΄Β΄.

ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.

Λύση



i)

Πάνω στην ημιευθεία Γ΄Β΄ θεωρούμε τμήμα $\Gamma'B'' = \Gamma B$.

Φέρουμε την $A'B''$.

$(\Pi-\Gamma-\Pi) \Rightarrow$ τρ.ΑΒΓ = τρ.$A'B''\Gamma'$ $\Rightarrow$ $\hat{B} = \hat{B}''$ και ΑΒ = Α΄Β΄΄

Η υπόθεση $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner \Rightarrow \hat{B}'' + \hat{B}' = 2\llcorner$

αλλά και $\omega + \hat{B}' = 2\llcorner$. Άρα $\hat{B}'' = \omega \Rightarrow$ Α΄Β΄ = Α΄Β΄΄

άρα και ΑΒ = Α΄Β΄

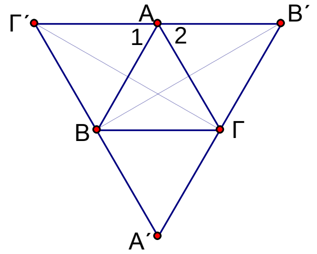
ii)

Αν δύο τρίγωνα έχουν πλευρά ίση, την προσκείμενη γωνία σε αυτή την πλευρά, ίση και την απέναντι γωνία σε αυτή την πλευρά πραπληρωματική, τότε έχουν ίση και την πλευρά που βρίσκεται απέναντι της ίσης γωνίας.

2.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και με πλευρές τις πλευρές του κατασκευάζουμε εξωτερικά του τρία ισόπλευρα τρίγωνα Α΄ΒΓ, ΑΒ΄Γ και ΑΒΓ΄. Να αποδείξετε ότι ΑΑ΄= ΒΒ΄= ΓΓ΄.

Λύση



Για να αποδείξουμε ότι ΒΒ΄= ΓΓ΄ αρκεί να αποδείξουμε τρ.ΑΒΒ΄ = ΑΓΓ΄

Είναι ΑΒ = ΑΓ **(1)**

ΑΒ΄=ΑΓ΄ από τα ισόπλευρα **(2)**

τρ.ΑΒΓ΄= τρ.ΑΓΒ΄ $\Rightarrow$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow$

$B\hat{A}B' = \Gamma\hat{A}\Gamma'$ **(3)**

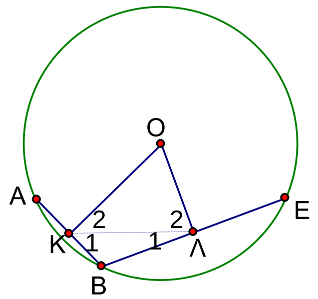
Από τις (1), (2), (3) $\Rightarrow$ τρ.ΑΒΒ΄ = ΑΓΓ΄

Ομοίως ΓΓ΄= ΑΑ΄.

3.

Αν OK, $O\Lambda$ είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών AB, $\Gamma\Delta$ κύκλου (O, R), να αποδείξετε ότι $AB < \Gamma\Delta$ αν και μόνο αν $OK > O\Lambda$

Λύση



Μεταφέρουμε τη χορδή $\Gamma\Delta$ στη θέση BE, οπότε δεν αλλάζει το απόστημα, αφού ίσες χορδές έχουν ίσα αποστήματα.
Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία:

$$AB < BE \Leftrightarrow OK > O\Lambda$$

Φέρνουμε το τμήμα $K\Lambda$.

$AB < BE \Leftrightarrow$

$KB < B\Lambda \Leftrightarrow$ (τα μισά τους)

$\hat{\Lambda}_1 < \hat{K}_1 \Leftrightarrow$ (απέναντι μικρότερης πλευράς μικρότερη γωνία στο $BK\Lambda$))

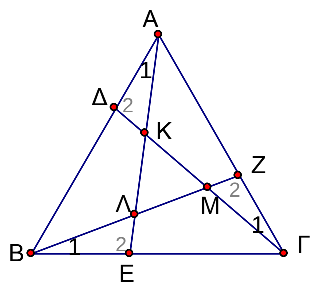
$\hat{\Lambda}_2 > \hat{K}_2 \Leftrightarrow$ (συμπληρωματικές των $\hat{\Lambda}_1, \hat{K}_1$)

$OK > O\Lambda$ (απέναντι μεγαλύτερης γωνίας μεγαλύτερη πλευρά).

4.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z των πλευρών του AB, $B\Gamma$, ΓA αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = BE = \Gamma Z$. Αν K, Λ, M τα σημεία τομής των AE, $\Gamma\Delta$ και BZ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.

Λύση



(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ.ABE = τρ.$B\Gamma Z$ = τρ.$\Gamma A\Delta$ $\Rightarrow$

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2 = \hat{Z}_2$

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ.$A\Delta K$ = τρ.$BE\Lambda$ = τρ.ΓZM $\Rightarrow$

$\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{M}$ $\Rightarrow$

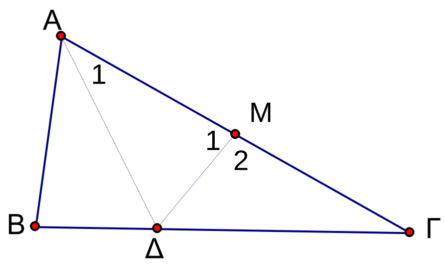
ίσες οι κατά κορυφή τους $\Rightarrow$

τρ.$K\Lambda M$ ισόπλευρο.

5.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < 1∟$ και ΑΓ = 2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} < \frac{\hat{A}}{2}$.

Λύση



Έστω Μ το μέσο της ΑΓ.
Τότε ΑΒ = ΑΜ = ΜΓ.

Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ του τρ.ΑΒΓ
(Π– Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ.ΑΜΔ = τρ.ΑΒΔ $\Rightarrow$
$\hat{M}_1 = \hat{B} < 1∟$ $\Rightarrow$
$\hat{M}_2 > 1$
Στο τρ.ΜΔΓ $\Rightarrow$ ΔΓ > ΜΓ.

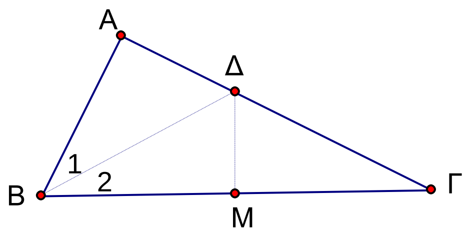
Τα τρίγωνα ΜΔΑ, ΜΔΓ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και περιεχόμενες γωνίες άνισες, άρα ΑΔ < ΔΓ , οπότε

στο τρ.ΔΑΓ θα είναι $\hat{\Gamma} < \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$

6.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1∟$.

Λύση



Έστω Μ το μέσο της ΒΓ.
Τότε ΑΒ = ΒΜ = ΜΓ.

Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ του τρ.ΑΒΓ
Τότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$

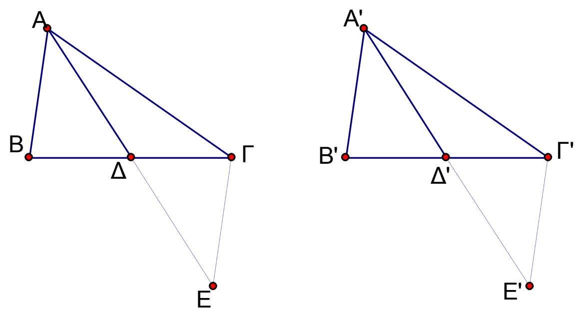
(Π - Γ – Π) $\Rightarrow$ τρ.ΒΜΔ = τρ.ΒΑΔ $\Rightarrow$
$\hat{M} = \hat{A}$

$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$ $\Rightarrow$ τρ.ΔΒΓ ισοσκελές $\Rightarrow$ η διάμεσός του ΔΜ είναι και ύψος.
Άρα $\hat{M} = 1∟$, οπότε και $\hat{A} = 1∟$.

7.

Να αποδείξετε ότι, δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Λύση



Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ με ΑΒ = Α΄Β΄, ΑΓ = Α΄Γ΄ και διαμέσους ΑΔ = Α΄Δ΄

Προεκτείνουμε τις διαμέσους κατά ίσα τους τμήματα ΔΕ, Δ΄Ε΄ αντίστοιχα.

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ.ΔΓΕ = τρ.ΔΒΑ και

τρ.Δ΄Γ΄Ε΄ = τρ.Δ΄Β΄Α΄

$\Rightarrow$ ΓΕ = ΒΑ = Β΄Α΄= Γ΄Ε΄

(Π–Π–Π) $\Rightarrow$ τρ.ΑΓΕ = τρ.Α΄Γ΄Ε΄ $\Rightarrow$ έχουν ίσες αντίστοιχες διαμέσους.

Άρα ΓΔ = Γ΄Δ΄ $\Rightarrow$ ΓΒ = Γ΄Β΄.

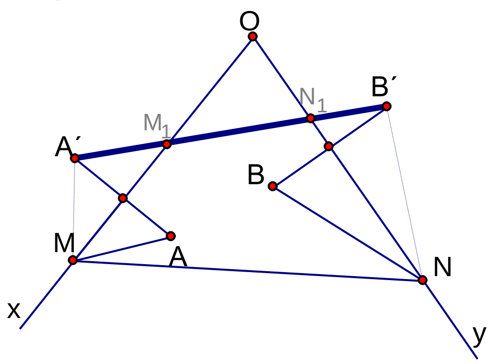
(Π –Π – Π) $\Rightarrow$ τρ.ΑΒΓ = τρ.Α΄Β΄Γ΄.

8.

Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$ και δύο εσωτερικά της σημεία Α και Β. Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την Οx και Β΄ το συμμετρικό του Β ως προς την Οy. Αν Μ, Ν είναι τυχαία σημεία των Οx, Οy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄.

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής, να βρείτε τις θέσεις των Μ, Ν, για τις οποίες το άθροισμα ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ είναι το μικρότερο δυνατό.

Λύση



Από τις συμμετρίες έχουμε

ΑΜ = Α΄Μ και ΒΝ = Β΄Ν $\Rightarrow$

ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄.

Έστω Σ το άθροισμα ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ.

Τότε Σ = Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄ $\geq$ Α΄Β΄.

Η μικρότερη, λοιπόν, τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα Σ, είναι Α΄Β΄. Σε αυτή την περίπτωση τα Μ, Ν θα είναι τα σημεία τομής της ΑΒ με τις Οx, Οy αντίστιχα, δηλαδή τα M_1, N_1.