3.17 – 3.18
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 70

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Πώς θα χωρισθεί με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα τμήματα ;

Απάντηση

Φέρνουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος και τις μεσοκάθετες των δύο επί μέρους τμημάτων.

2.

Πως θα βρεθεί με κανόνα και διαβήτη το μέσο ενός τόξου δοσμένου κύκλου;

Απάντηση

Είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της αντίστοιχης χορδής με το τόξο.

3.

Πώς θα βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει γραφτεί με ένα νόμισμα;

Απάντηση

Είναι το σημείο τομή των μεσοκαθέτων δύο χορδών του κύκλου .

4.

Τα τμήματα α, β, γ με $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου όταν

Α. $\alpha = \beta + \gamma$, Β. $\alpha > \beta + \gamma$ Γ. $\alpha < \beta + \gamma$ Δ. $\alpha < 2(\beta + \gamma)$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

Κυκλώστε την σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντηση σας .

Απάντηση

Αφού $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ θα είναι προφανώς $\alpha > |\beta - \gamma|$.

Οπότε αν ακόμα ισχύει και $\alpha < \beta + \gamma$ τότε θα ισχύει η τριγωνική ανισότητα και επομένως τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία 45^{o}

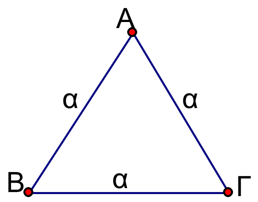
Λύση

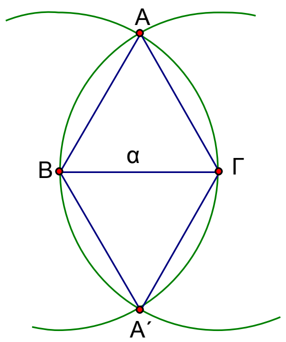
Κατασκευάζουμε γωνία 90^{o} και φέρουμε τη διχοτόμο της

2.
Να χωρίσετε δοσμένη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.
Λύση
Διχοτομούμε τη δοσμένη γωνία, όπως και τις γωνίες που προκύπτουν.

3.
Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά γνωστό τμήμα α.

Λύση





Ανάλυση
Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά α.
Κατασκευάσιμο από τη θεωρία στοιχείο το τμήμα ΒΓ = α
Η κορυφή Α απέχει από το Β απόσταση α. Άρα το σημείο Α θα ανήκει στον κύκλο (Β, α)
Ομοίως το Α θα ανήκει στον κύκλο (Γ, α)
Η κορυφή Α, λοιπόν, θα είναι η τομή των δύο κύκλων

Σύνθεση (κατασκευή)
Κατασκευάζουμε τμήμα ΒΓ = α.
Κατασκευάζουμε τους κύκλους (Β, α) και (Γ, α) οι οποίοι τέμνονται έστω σε σημείο Α.
Το τρίγωνο ΑΒΓ υποστηρίζουμε ότι είναι το ζητούμενο.

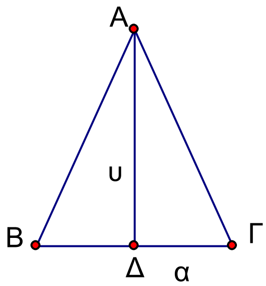
Απόδειξη
Είναι ΑΒ = α σαν ακτίνα του κύκλου (Β, α) και ΑΓ = α σαν ακτίνα του κύκλου (Γ, α) Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α.

Διερεύνηση
Η κατασκευή του τμήματος ΒΓ = α μοναδική.
Η κατασκευή των δύο κύκλων επίσης.
Οι δύο κύκλοι τέμνονται διότι η διάκεντρος ΒΓ είναι μικρότερη του αθροίσματος των ακτίνων και μεγαλύτερη της διαφοράς τους.
Έτσι, οι κύκλοι έχουν και δεύτερο κοινό σημείο Α΄. Δηλαδή κατασκευάζεται και δεύτερο ζητούμενο τρίγωνο το Α΄ΒΓ, το οποίο όμως δεν αποτελεί δεύτερη λύση του προβλήματος, αφού προφανώς είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ. Απλά το δεύτερο τρίγωνο βρίσκεται σε διαφορετική θέση.

4.

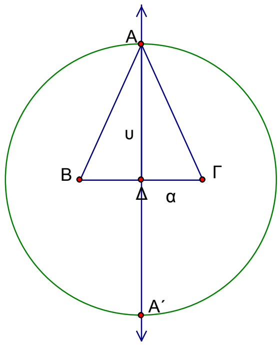
Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίνονται η βάση α και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος υ.

Λύση



Ανάλυση

Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο με ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και ΑΒ = ΑΓ.
Επειδή ΑΒ = ΑΓ, το Α θα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ.
Επειδή ΑΔ = υ, το Α θα ανήκει στον κύκλο (Δ, υ).



Σύνθεση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α. και το μέσο του Δ.
Φέρουμε τη μεσοκάθετο του ΒΓ.
Γράφουμε κύκλο (Δ, υ), ο οποίος τέμνει τη μεσοκάθετο σε σημείο Α.
Υποστηρίζουμε (και θα το αποδείξουμε) ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Έχει ΒΓ = α
Επειδή το Α ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, είναι ΑΒ = ΑΓ, δηλαδή τρ. ΑΒΓ ισοσκελές.
Τέλος, έχει ύψος ΑΔ = υ, αφού είναι ακτίνα του κύκλου.

Διερεύνηση

Υπάρχει και δεύτερο σημείο τομής Α΄ του κύκλου με τη μεσοκάθετο, συμμετρικό του Α ως προς τη ΒΓ, οπότε τρ.Α΄ΒΓ = τρ. ΑΒΓ, άρα το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

5.

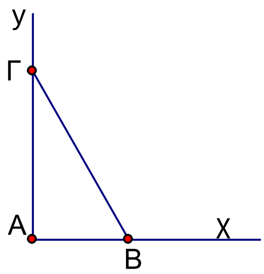
Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{o}$, όταν δίνονται

i) ΑΒ = γ και ΑΓ = β

ii) ΑΒ = γ και ΒΓ = α

όπου α, β, γ γνωστά τμήματα.

Λύση

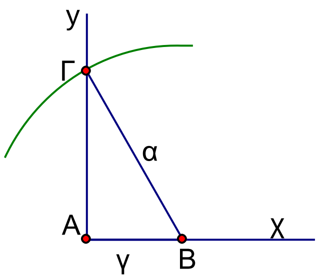


i) Γράφουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$.

Πάνω στην Αx θεωρούμε τμήμα ΑΒ = γ.
Πάνω στην Αy θεωρούμε τμήμα ΑΓ = β

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο,
αφού από την κατασκευή του έχει τα δοσμένα
στοιχεία.

Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση, αφού κάθε επί μέρους κατασκευή είναι μοναδική.



ii) Γράφουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$.

Πάνω στην Αx θεωρούμε τμήμα ΑΒ = γ.
Γράφουμε τον κύκλο (Β, α), ο οποίος τέμνει την
Αx έστω στο Γ.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο, διότι:
είναι ορθογώνιο στο Α
έχει ΑΒ = γ
και ΒΓ = α σαν ακτίνα.

Ο κύκλος (Β, α), για να τέμνει την Αy,
πρέπει α > γ