

3.16

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 65 – 66

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Αν (K, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και $R > \rho$, $K\Lambda = \delta$, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.

Στήλη A		Στήλη B
α. Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του κύκλου (K, R)	4	1. $\delta > R + \rho$
β. Ο κύκλος (Λ, ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (K, R)	3	2. $\delta = R + \rho$
γ. Οι κύκλοι (Λ, ρ) και (K, R) τέμνονται	8	3. $\delta = R - \rho$
δ. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά	2	4. $\delta < R - \rho$
ε. Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου	1	5. $2\delta = R - \rho$
		6. $\rho < \delta < R$
		7. $2\delta = R\rho$
		8. $R - \rho < \delta < R + \rho$

2.

Χαρακτηρίστε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i) Η διάκεντρος δύο τεμνομένων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής



Λ

ii) Η κοινή χορδή δύο ίσων τεμνομένων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου



Λ

iii) Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου



Λ

i) Βασικό θεώρημα

ii) Παρατήρηση σελίδας 64

iii) Βασική θεωρία

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να προσδιοριστούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (K, ρ) και $(\Lambda, 2\rho)$ αν

- i) $ΚΛ = \frac{\rho}{2}$
- ii) $ΚΛ = \rho$
- iii) $ΚΛ = 2\rho$
- iv) $ΚΛ = 3\rho$
- v) $ΚΛ = 4\rho$

Λύση

$$R_2 - R_1 = 2\rho - \rho = \rho$$

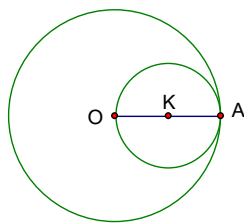
$$R_2 + R_1 = 2\rho + \rho = 3\rho$$

- i) Είναι $ΚΛ < R_2 - R_1$ Άρα ο κύκλος (K, ρ) είναι εσωτερικός του $(\Lambda, 2\rho)$
- ii) Είναι $ΚΛ = R_2 - R_1$ Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά
- iii) Είναι $R_2 - R_1 < ΚΛ < R_2 + R_1$ Άρα οι κύκλοι τέμνονται
- iv) Είναι $ΚΛ = R_2 + R_1$ Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά
- v) Είναι $ΚΛ > R_2 + R_1$ Άρα ο κάθε κύκλος εξωτερικός του άλλου.

2.

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μια ακτίνα του OA . Γράφουμε κύκλο με διάμετρο OA . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

Λύση



$$\text{Η διάκεντρος είναι } OK = \frac{OA}{2} = \frac{\rho}{2}$$

$$\text{Αλλά } R_1 - R_2 = \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}$$

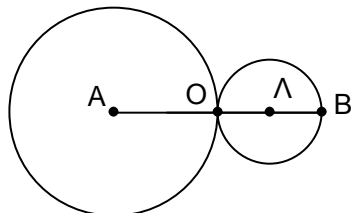
$$\text{Άρα } OK = R_1 - R_2$$

Οπότε οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

3.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσο του O . Γράφουμε τον κύκλο (A, AO) και τον κύκλο με διάμετρο OB . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

Λύση



Έστω $AB = 2\alpha$. Τότε $AO = OB = \alpha$

$$\text{και } O\Lambda = \Lambda B = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Διάκεντρος } A\Lambda = AO + O\Lambda = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2} \quad (1)$$

$$R_1 + R_2 = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ και } (2) \Rightarrow A\Lambda = R_1 + R_2$$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

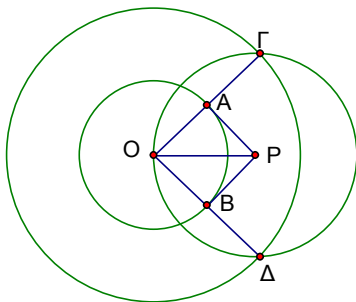
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δίνεται κύκλος (O,R) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2R$. Γράφουμε τον κύκλο $(O, 2R)$. Να αποδείξετε ότι :

- i) ο κύκλος $(O, 2R)$ τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ
- ii) τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία A και B
- iii) τα PA και PB εφάπτονται στον (O, R) .

Λύση



Οι ακτίνες των κύκλων έστω ότι είναι

$$OA = R_1 = R$$

$$O\Gamma = R_2 = 2R$$

$$PO = R_3 < 2R$$

i)

Αρκεί να δειχθεί ότι

$$R_2 - R_1 < OP < R_2 + R_1 \quad \text{ή αρκεί}$$

$$2R - R < OP < 2R + R \quad \text{ή αρκεί}$$

$$R < OP < 3R \quad \text{το οποίο ισχύει}$$

ii)

Το σημείο O είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) και το Γ εξωτερικό
Άρα το τμήμα $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο, έστω στο A .

Ομοίως για B .

iii)

Επειδή $O\Gamma = 2R$ και $OA = R$, το A είναι μέσο της χορδής $O\Gamma$ του κύκλου (P, PO) , άρα το PA είναι απόστημα, δηλαδή $PA \perp O\Gamma$. Άρα PA εφάπτεται στον κύκλο (O,R) .

2.

Δίνονται οι κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1 + R_2 > 2R_2$.

i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

ii) Έστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία M, M' και τον (O_2) στα σημεία N, N' αντίστοιχα, με τα M, N μεταξύ των M', N' . Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου A, B τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

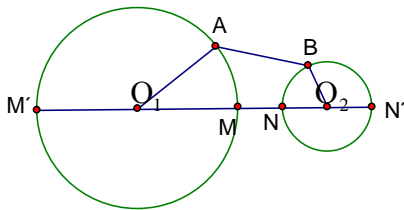
Λύση

i)

Η ανισότητα $O_1O_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow$ ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

Η ανισότητα $R_1 + R_2 > 2R_2 \Rightarrow R_1 > R_2$

ii)



$$O_1O_2 \leq O_1A + AB + BO_2 \Rightarrow$$
~~$$O_1M + MN + NO_2 \leq O_1A + AB + BO_2$$~~

$$MN \leq AB$$

$$AB \leq AO_1 + O_1O_2 + O_2B \Rightarrow$$

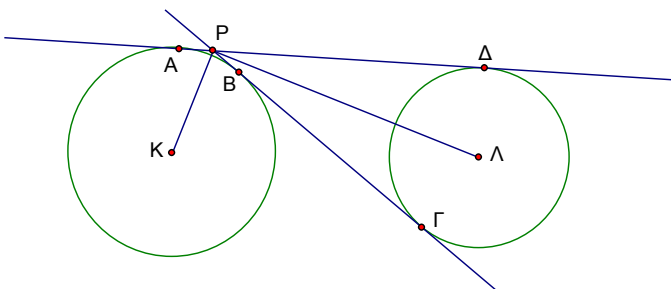
$$AB \leq O_1M' + O_1O_2 + O_2N' \Rightarrow$$

$$AB \leq M'N'$$

3.

Ένας κύκλος κέντρου K είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ . Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο P . Να αποδείξετε ότι $K\hat{P}\Lambda = 90^\circ$

Λύση



PA, PB εφαπτόμενα τμήματα.
Άρα PK διχοτόμος της $A\hat{P}B$

PG, PD εφαπτόμενα τμήματα
Άρα PL διχοτόμος της $G\hat{P}\Delta$

Έτσι, οι PK, PL είναι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών άρα είναι κάθετες.