3.14 -3.15

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 62 – 63

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Πότε μία ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;

Έστω δ η απόσταση του κέντρου από την ευθεία και ρ η ακτίνα του κύκλου τότε

i) Δύο κοινά σημεία, όταν $\delta < \rho$

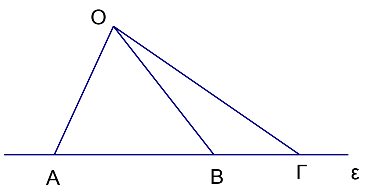
ii) Ένα κοινό σημείο, όταν $\delta = \rho$

iii) Κανένα κοινό σημείο, όταν $\delta > \rho$

2.

Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ;

Δικαιολογήστε την απάντηση σας

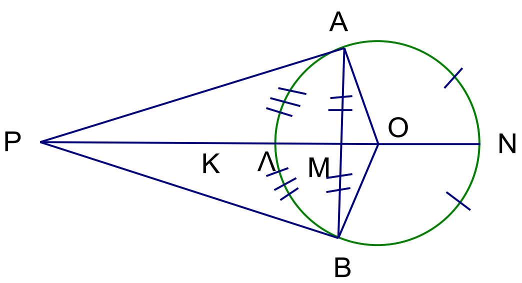


Όχι διότι τότε ο κύκλος με κέντρο το Ο θα είχε τρία κοινά σημεία με την ευθεία ε

3.

Στο παρακάτω σχήμα τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα , η ΡΚ διχοτόμος της $A\hat{P}B$, τα Λ, Ν μέσα των τόξων ΑΛΒ και ΑΝΒ αντίστοιχα και Μ το μέσο της χορδής ΑΒ.

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις



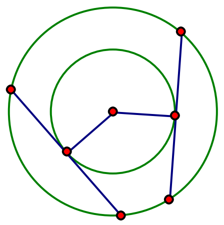
i) ΡΑ = ΡΒ	Σ	Λ
ii) Η ΡΚ διέρχεται από το Ο	Σ	Λ
iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν	Σ	Λ
iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο ΑΝΒ	Σ	Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.

Λύση

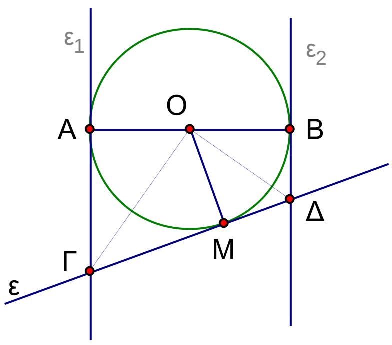


Γιατί έχουν ίσα αποστήματα

2.

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου στα Α, Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις ε_1, ε_2 στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^o$

Λύση

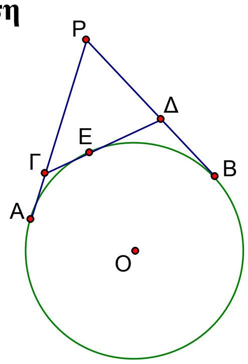


Έστω Μ το σημείο επαφής της ε με τον κύκλο.
Η διακεντρική ευθεία ΓΟ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}M$.
Η διακεντρική ευθεία ΔΟ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{O}M$.
Δηλαδή οι ΟΓ, ΟΔ διχοτομούν δύο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες, άρα είναι κάθετες.

3.

Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μια τρίτη εφαπτομένη σε σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των τμημάτων ΡΑ και ΓΔ.

Λύση



Είναι ΓΕ = ΓΑ σαν εφαπτόμενα τμήματα
Ομοίως ΔΕ = ΔΒ και ΡΑ = ΡΒ

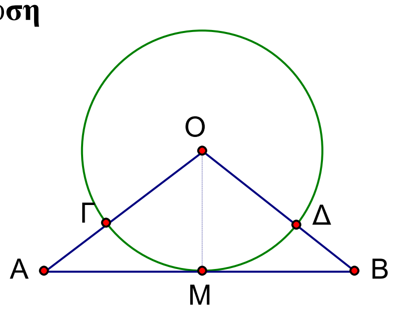
$$P\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta P = PA - \Gamma A + \Gamma\Delta + PB - \Delta B$$
$$= 2\,PA$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μιας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.

Λύση



(Ο, ρ) ο κύκλος
AMB εφαπτομένη με MA = MB
Οι ΟΑ, ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Γ,Δ
Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ = ΒΔ

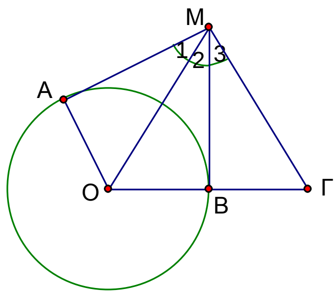
Φέρουμε την ΟΜ. Τότε $OM \perp AB$

$$\begin{aligned} (\Pi\text{-}\Gamma\text{-}\Pi) \Rightarrow \ & \text{τρ. } OMA = \text{τρ. } OMB \Rightarrow \\ & OA = OB \Rightarrow \\ & OA - O\Gamma = OB - O\Delta \Rightarrow \\ & A\Gamma = B\Delta \end{aligned}$$

2.

Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ, ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι τριπλάσια της $B\hat{M}\Gamma$.

Λύση

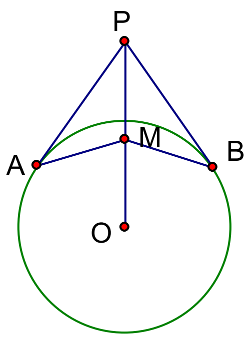


ΒΜ μεσοκάθετος του ΟΓ $\Rightarrow$
$\hat{M}_2 = \hat{M}_3$
ΜΑ, ΜΒ εφαπτόμενα τμήματα $\Rightarrow$
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
Άρα $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3$
Οπότε $A\hat{M}\Gamma = 3\ \hat{M}_3$

3.

Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΟΡ να αποδείξετε ότι $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.

Λύση



Τρ. ΡΜΑ = τρ. ΡΜΒ διότι
ΡΜ κοινή,
ΡΑ = ΡΒ σαν εφαπτόμενα τμήματα
και ΡΟ διχοτόμος της $A\hat{P}B$ σαν διακεντρική ευθεία.
Άρα $M\hat{A}P = M\hat{B}P$