3.10 – 3.12
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 57 - 58

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Χαρακτηρίστε (Σ) σωστή ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις

i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από την $\hat{\Gamma}$ Σ Λ

ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από την $\hat{\Gamma}$ Σ Λ

iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o Σ Λ

iv) Αν $\beta > \gamma$ σε τρίγωνο ΑΒΓ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα Σ Λ

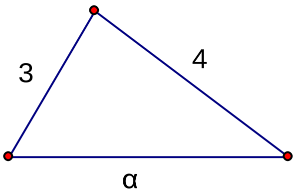
v) Αν $\beta = \gamma$ σε τρίγωνο ΑΒΓ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα Σ Λ

2.

Για το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος ισχύει

α. $\alpha = 7$, β . $\alpha = 1$, γ $1 < \alpha < 7$, δ. $\alpha > 7$, ε. $0<\alpha<1$

κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντηση σας .



Με βάση την τριγωνική ανισότητα για την πλευρά α έχουμε

$$4-3 < \alpha < 4+3 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 7$$

3.

Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντηση σας .

Λύση

$$\alpha + \beta = \frac{\gamma}{3} + \frac{3\gamma}{5} = \frac{14\gamma}{15} < \gamma$$

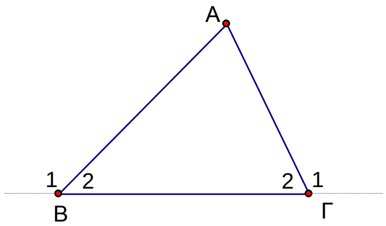
άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με τα παραπάνω στοιχεία

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90^0$.

Λύση



$\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$ από υπόθεση **(1)**

$\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_2$ εξωτερική του τρ. ΑΒΓ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $2\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$

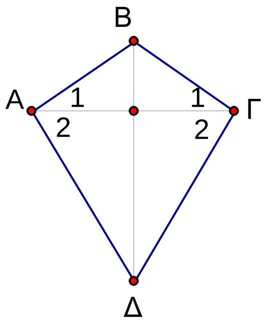
$2\hat{B}_1 > 180^0 \Rightarrow$

$\hat{B}_1 > 90^0$

2.

Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;

Λύση



ΑΒ = ΒΓ $\Rightarrow$ $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ **(1)**

υπόθεση $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ **(2)**

(2) – (1) $\Rightarrow$ $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$

τρ. ΔΑΓ ισοσκελές δηλαδή ΔΑ = ΔΓ

Επειδή το Β ισαπέχει από τα Α, Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΓ. Ομοίως για το Δ. Άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

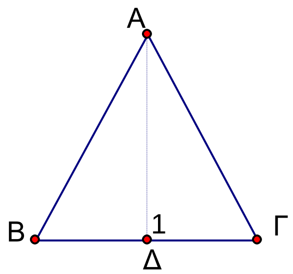
3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$;

ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

Λύση



i) $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^o \Rightarrow 2\hat{B} < 180^o \Rightarrow \hat{B} < 90^o$ οξεία.

ii) $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow$ ΑΒ = ΑΓ

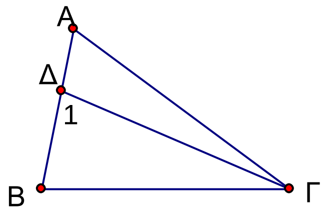
Έστω Δ το μέσο της ΒΓ.

Τότε ΑΔ διάμεσος άρα και ύψος, με το Δ να είναι εσωτερικό σημείο της ΒΓ, αφού είναι μέσο της.

4.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της ημιευθείας Bx που περιέχει το A. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των B και A, ταυτίζεται με το A ή βρίσκεται μετά το A.

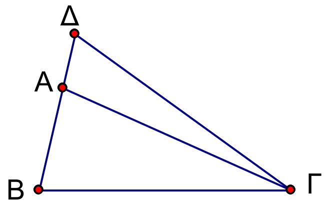
Λύση



- Όταν το Δ βρίσκεται μεταξύ των B και A

  $\hat{\Delta}_1 > B\hat{A}\Gamma$ σαν εξωτερική και απέναντι εσωτερική του τριγώνου $\Delta A\Gamma$

- Όταν το Δ ταυτίζεται με το A.
  Είναι προφανές ότι οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $B\hat{A}\Gamma$ ταυτίζονται, άρα είναι ίσες.



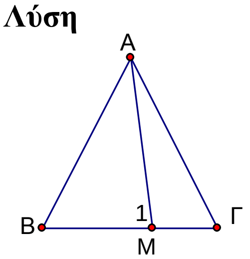
- Όταν το Δ βρίσκεται μετά το A.

  $B\hat{A}\Gamma > \hat{\Delta}_1$ σαν εξωτερική και απέναντι εσωτερική του τριγώνου $\Delta A\Gamma$

5.

Αν M σημείο της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AM < AB$.

Λύση



Τρ. $AM\Gamma \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{\Gamma} \Rightarrow$

$\hat{M}_1 > \hat{B}$

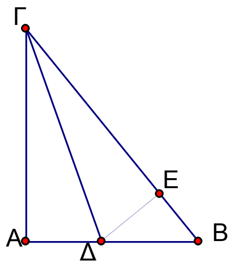
Στο τρίγωνο AMB, απέναντι μεγαλύτερης γωνίας βρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά

Άρα $AB > AM$

6.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΒ.

Λύση



Φέρνουμε $\Delta K \perp B\Gamma$

Είναι $\Delta A = \Delta K$ **(1)** σαν αποστάσεις του σημείου Δ της διχοτόμου από τις πλευρές της γωνίας.

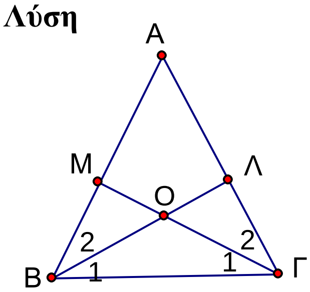
Τρ. ΚΔΒ ορθογώνιο $\Rightarrow$ $\Delta K < \Delta B$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\Delta A < \Delta B$

7.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει $BO = \Gamma O$ και $O\Lambda = OM$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση



(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΟΜΒ = τρ. ΟΛΓ $\Rightarrow$

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ **(1)**

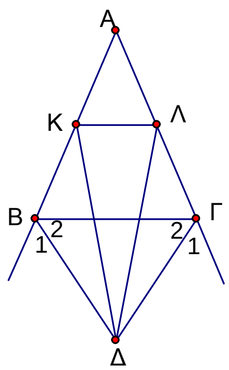
τρ. ΟΒΓ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα τρ. ΑΒΓ ισοσκελές.

8.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι , αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση



Συμπεράσματα:

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$

$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ $\Rightarrow$ τρ. ΔΒΓ ισοσκελές με $\Delta B = \Delta\Gamma$

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΚΒΔ = τρ. ΚΓΛ

Άρα $\Delta K = \Delta\Lambda$

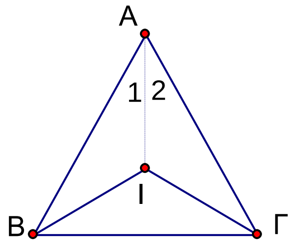
9.

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και $Ι$ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο $ΒΙΓ$ είναι ισοσκελές

ii) Η $ΑΙ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Α}$.

Λύση



i) $\dfrac{\hat{Β}}{2} = \dfrac{\hat{Γ}}{2} \Rightarrow$ τρ. $ΙΒΓ$ ισοσκελές με $ΙΒ = ΙΓ$

ii) (Π–Π–Π) $\Rightarrow$ τρ.$ΑΒΙ$ = τρ. $ΑΓΙ$

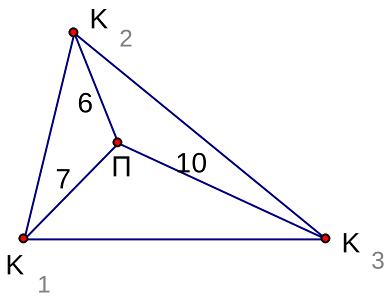
$\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$

$ΑΙ$ διχοτόμος

10.

Οι κωμοπόλεις $Κ_1$, $Κ_2$, $Κ_3$ απέχουν από την πόλη $Π$ αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη $Κ_1$ και ακολουθώντας τη διαδρομή $Κ_1Κ_2Κ_3Κ_1$ επιστρέφει στην $Κ_1$. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν;

Λύση



Από εφαρμογή έχουμε

$Κ_1Κ_2 < ΠΚ_1 + ΠΚ_2 \Rightarrow$

$Κ_1Κ_2 < 7+6 \Rightarrow Κ_1Κ_2 < 13$

Ομοίως $Κ_2Κ_3 < 16$

$Κ_3Κ_1 < 17$

.................................+

$Κ_1Κ_2 + Κ_2Κ_3 + Κ_3Κ_1 < 46 \Rightarrow$

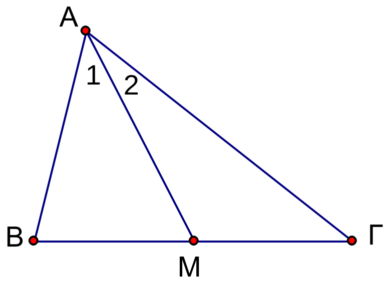
$48 < 46$ που είναι άτοπο.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

Λύση



Έστω ΑΔ η διάμεσος μ_α

$$\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow A\Delta < \Delta B \overset{\text{τρ.}A\Delta B}{\Rightarrow} \hat{B} < \hat{A}_1$$

$$\text{και} \qquad A\Delta < \Delta\Gamma \overset{\text{τρ.}A\Delta\Gamma}{\Rightarrow} \hat{\Gamma} < \hat{A}_2$$

$$\text{..............} +$$

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$$

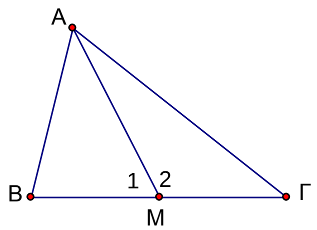
Ομοίως, όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$ και

όταν $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} > \hat{A}$

2.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$

Λύση



Τα τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΑΓ έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΜ κοινή και $MB = M\Gamma$) και τις τρίτες άνισες.
Άρα $\hat{M}_2 > \hat{M}_1$

3.

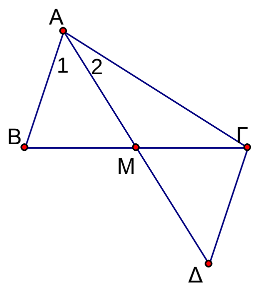
Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$

ii) $\dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

Λύση



i) Προεκτείνουμε τη διάμεσο $ΑΜ = \mu_\alpha$ κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$.

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. $ΜΓΔ$ = τρ. $ΜΒΑ$ $\Rightarrow$
$ΓΔ = ΑΒ < ΑΓ$ και $\hat{\Delta} = \hat{A}_1$ **(1)**

Αφού $ΓΔ < ΑΓ$, στο τρ. $ΓΑΔ$ $\Rightarrow$ $\hat{\Delta} > \hat{A}_2$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow$ $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$

ii) Τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΓΑΔ$: $\beta-\gamma < ΑΔ < \beta+\gamma \Rightarrow$

$$\beta-\gamma < 2.\mu_\alpha < \beta+\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

iii) Από ii) έχουμε $2.\mu_\alpha < \beta+\gamma$ **(1)**

ομοίως $2.\mu_\beta < \gamma+\alpha$ **(2)**

και $2.\mu_\gamma < \alpha+\beta$ **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $2(\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma) < 2.\alpha+2.\beta+2.\gamma \Rightarrow$

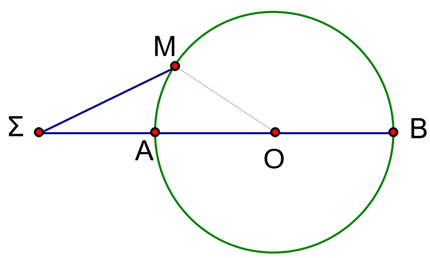
$$\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma \Rightarrow$$

$$\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma < 2.\tau$$

4.

Έστω κύκλος (O,R) διαμέτρου $ΑΒ$ και σημείο $Σ$ της ημιευθείας $ΟΑ$. Για κάθε σημείο $Μ$ του κύκλου να αποδειχθεί ότι $ΣΑ \le ΣΜ \le ΣΒ$

Λύση



i) Όταν $Μ \neq Α$ και $Β$
Φέρνουμε την ακτίνα $ΟΜ$.
Τριγωνική ανισότητα στο τρ. $ΣΟΜ$

$ΣΟ – ΟΜ < ΣΜ < ΣΟ + ΟΜ \Rightarrow$
$ΣΟ – ΟΑ < ΣΜ < ΣΟ + ΟΒ \Rightarrow$
$ΣΑ < ΣΜ < ΣΒ$

ii) Όταν $Μ \equiv Α$ τότε $ΣΑ = ΣΜ < ΣΒ$

iii) Όταν $Μ \equiv Β$ τότε $ΣΑ < ΣΜ = ΣΒ$

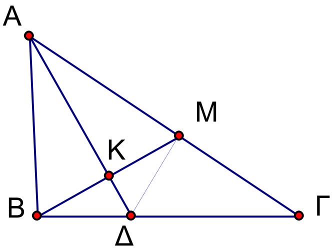
5.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι :

i) ΑΓ = 2.ΑΒ

ii) ΑΒ < ΒΓ

Λύση



Έστω ΑΔ η δ_α και ΒΜ η μ_β, που τέμνονται στο Κ.

i) Το ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΜ, άρα ισοσκελές με
ΑΜ = ΑΒ
ΑΓ = 2.ΑΜ = 2.ΑΒ

ii) Φέρουμε τη ΜΔ

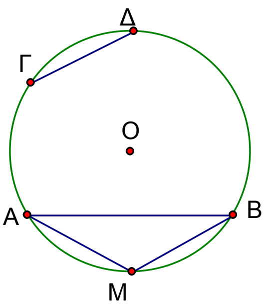
Η ΑΚΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΜ $\Rightarrow$ ΔΜ = ΔΒ **(1)**

Από το τρ. ΜΔΓ έχουμε ΜΓ < ΜΔ + ΔΓ $\Rightarrow$
ΑΒ < ΔΒ + ΔΓ $\Rightarrow$
ΑΒ < ΒΓ

6.

Έστω κύκλος (Ο,R) και δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Αν $\overset{\frown}{AB} = 2\,\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2 ΓΔ

Λύση



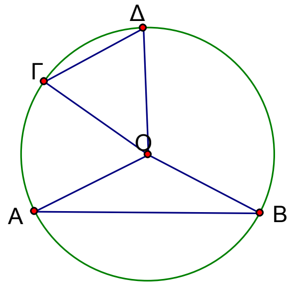
Έστω Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Τότε
$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ άρα και ΑΜ = ΜΒ = ΓΔ

Από το τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε
ΑΒ < ΑΜ + ΜΒ $\Rightarrow$
ΑΒ < 2 ΓΔ

7.

Να αποδείξετε ότι σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα. (Περιορισμός: Τόξα μικρότερα των 180^o)

Λύση



Ευθύ.

Υπόθεση AB > ΓΔ

Φέρνουμε τις ακτίνες στα άκρα των τόξων.

Τότε $\hat{O}_1 > \hat{O}_2$.

Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ έχουν δύο πλευρές ίσες και περιεχόμενη γωνία άνιση, άρα AB > ΓΔ

Αντίστροφο

Υπόθεση AB > ΓΔ

Με τη σε άτοπο απαγωγή **:** Έστω ότι είναι AB $\leq$ ΓΔ.

Από το ευθύ, θα είναι AB $\leq$ ΓΔ που είναι άτοπο

Σύνθετα Θέματα

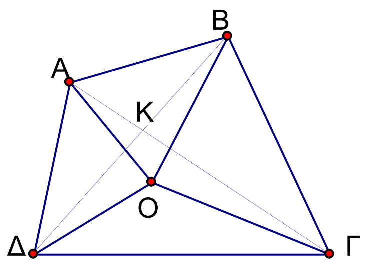
1.

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και O εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι $OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \dfrac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$

ii) Για ποια θέση του O το άθροισμα $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ γίνεται ελάχιστο;

Λύση



i)

Τρ. OAB : $OA + OB > AB$

Τρ. $OB\Gamma$: $OB + O\Gamma > B\Gamma$

ΤΡ. $O\Gamma\Delta$: $O\Gamma + O\Delta > \Gamma\Delta$

ΤΡ. $O\Delta A$: $O\Delta + OA > \Delta A$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$2\,(OA + OB + O\Gamma + O\Delta) > AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$$

ii)

Όταν το O δεν είναι σημείο της διαγωνίου $A\Gamma$, από το τρίγωνο $OA\Gamma$ έχουμε $OA + O\Gamma > A\Gamma$

Όταν το O είναι σημείο της διαγωνίου $A\Gamma$, τότε $OA + O\Gamma = A\Gamma$

Σε κάθε περίπτωση είναι $OA + O\Gamma \geq A\Gamma$ **(1)**

Ομοίως $OB + O\Delta \geq B\Delta$ **(2)**

$(1) + (2) \Rightarrow OA + OB + O\Gamma + O\Delta \geq A\Gamma + B\Delta$

Η ελάχιστη, λοιπόν, τιμή του αθροίσματος $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ είναι $A\Gamma + B\Delta$ και αυτό συμβαίνει όταν το O συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων.

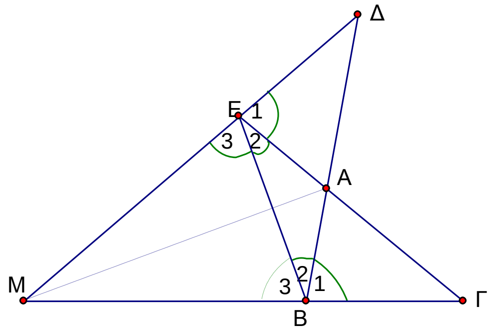
2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι :

i) Το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές

ii) Η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο Α.

Λύση



i)

(Π– Γ– Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΕΔ = τρ. ΑΒΓ

Άρα $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$

Τρ. ΑΒΕ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{E}_2 = \hat{B}_2$

Επομένως $\hat{E}_3 = \hat{B}_3$

Άρα τρ. ΜΕΒ ισοσκελές

ii)

Τα σημεία Α, Μ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΒΕ, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετό του, δηλαδή η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ. Λόγω, δε, του ισοσκελούς ΜΒΕ, θα είναι και διχοτόμος.

3.

Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

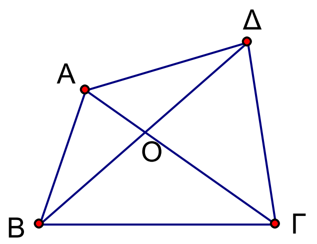
Να αποδείξετε ότι :

i) Κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου

ii) ΑΓ + ΒΔ > ΑΒ + ΓΔ και ΑΓ + ΒΔ > ΑΔ + ΒΓ

iii) Το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου

Λύση



i)

Τρ. ΑΒΓ : ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ **(1)**

Τρ. ΑΔΓ : ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ **(2)**

(1) + (2) ⇒ 2 ΑΓ < 2τ ⇒ ΑΓ < τ **(3)**

Ομοίως ΒΔ < τ **(4)**

ii)

Τρ. ΟΑΒ : ΟΑ + ΟΒ > ΑΒ **(5)**

Τρ. ΟΓΔ : ΟΓ + ΟΔ > ΓΔ **(6)**

(5) + (6) ⇒ ΑΓ + ΒΔ > ΑΒ + ΓΔ **(7)**

Ομοίως ΑΓ + ΒΔ > ΑΔ + ΒΓ **(8)**

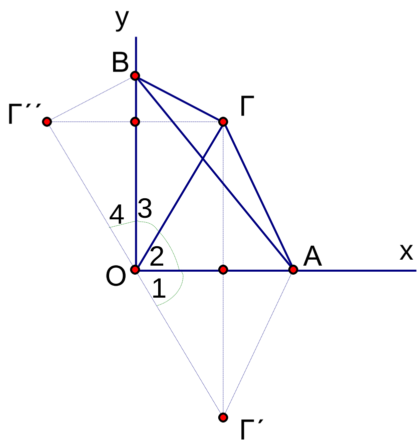
iii)

(3) + (4) ⇒ ΑΓ + ΒΔ < 2 τ και (7) + (8) ⇒ 2 (ΑΓ + ΒΔ) > 2 τ ⇒ ΑΓ + ΒΔ > τ

4.

Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Ox, Oy τα σημεία A, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2.ΟΓ.

Λύση



Γ´ το συμμετρικό του Γ ως προς την Ox
Γ´´ το συμμετρικό του Γ ως προς την Oy

Τότε ΟΓ´= ΟΓ = ΟΓ´´
ΑΓ´= ΑΓ και ΒΓ´= ΒΓ
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

αλλά $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 =$
$\hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_3 =$
$2\,\hat{O}_2 + 2\,\hat{O}_3 =$
$2\,(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2.\,90^o = 180^o$

άρα Γ´, Ο, Γ´´ συνευθειακά

Είναι Γ´Γ´´ < Γ´Α + ΑΒ+ ΒΓ´´ ⇒ Γ´Ο + ΟΓ´´ < ΑΓ + ΑΒ + ΓΒ
ΟΓ + ΟΓ < 2 τ
2 ΟΓ < 2 τ