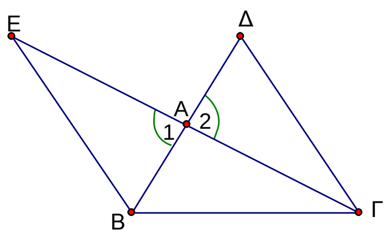
3.1 – 3.2
Ασκήσεις σχ.βιβλίου σελίδας 38

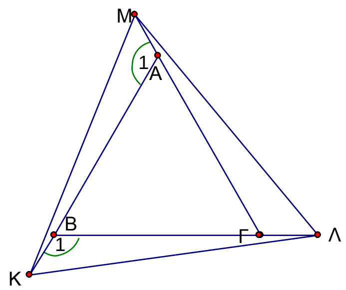
Ασκήσεις Εμπέδωσης
1.
Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.
Λύση



$$\left.\begin{array}{r} \text{ΑΔ} = \text{ΑΒ} \\ \text{ΑΕ} = \text{ΑΓ} \\ \hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{τρ. ΑΒΕ} = \text{τρ.ΑΔΓ}$$

Άρα ΒΕ = ΓΔ

2.
Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.
Λύση



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΑΚ, ΚΒΛ

$\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Β}} \Rightarrow \hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Β}}_1$

ΜΑ = ΚΒ

ΑΚ = ΒΛ σαν αθροίσματα ίσων

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΜΑΚ = τρ. ΚΒΛ

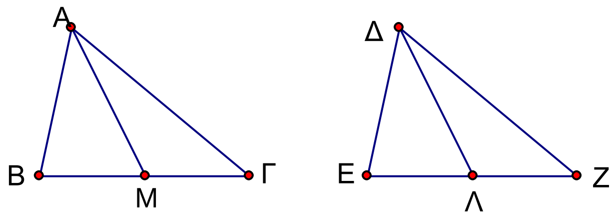
Άρα ΜΚ = ΚΛ

Ομοίως ΚΛ = ΛΜ

3.

Να αποδείξετε ότι στις ίσες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

Λύση



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ, ΔΕΛ.

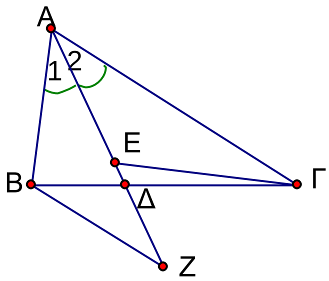
$$\text{τρ.ΑΒΓ} = \text{τρ.ΔΕΖ} \;\Rightarrow \begin{cases} \text{ΑΒ=ΔΕ} \\ \hat{\text{Β}}=\hat{\text{Ε}} \\ \text{ΒΜ=ΕΛ, μισά ίσων} \end{cases}$$

$$(\text{Π–Γ–Π}) \;\Rightarrow\; \text{τρ. ΑΒΜ} = \text{τρ ΔΕΛ} \;\Rightarrow\; \text{ΑΜ} = \text{ΔΛ}$$

4.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{\text{Α}}$ στην οποία θεωρούμε τμήμα ΑΕ = ΑΒ και τμήμα ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Ε} = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Β}$

Λύση



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΖ, ΑΕΓ

$$\left.\begin{matrix} \text{ΑΒ=ΑΕ} \\ \hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Α}}_2 \\ \text{ΑΖ=ΑΓ} \end{matrix}\right\} \;(\text{Π–Γ-Π})\Rightarrow\; \text{τρ. ΑΒΖ} = \text{τρ.ΑΕΓ}$$

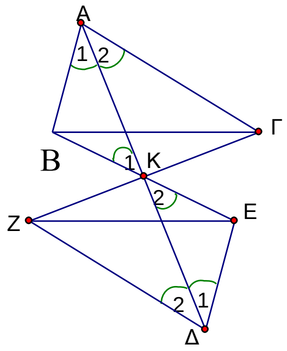
Άρα $\text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Ε} = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Β}$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Κ$ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των $ΑΚ$, $ΒΚ$, $ΓΚ$ θεωρήσουμε τμήματα $ΚΔ = ΑΚ$, $ΚΕ = ΒΚ$, $ΚΖ = ΓΚ$, να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Δ}Ζ = Β\hat{Α}Γ$.

Λύση



$$\left.\begin{array}{c} ΚΑ=ΚΔ \\ \hat{Κ}_1=\hat{Κ}_2 \\ ΚΒ=ΚΕ \end{array}\right\} \;(Π–Γ–Π) \;\Rightarrow\; τρ.\ ΚΑΒ = τρ.\ ΚΔΕ$$

Άρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Α}_1$ **(1)**

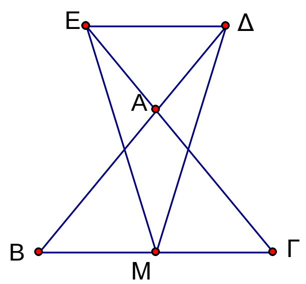
Ομοίως $\hat{Δ}_2 = \hat{Α}_2$ **(2)**

$(1) + (2) \;\Rightarrow\; Ε\hat{Δ}Ζ = Β\hat{Α}Γ$

2.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του $ΒΑ$, $ΓΑ$ θεωρούμε ίσα τμήματα $ΑΔ$, $ΑΕ$ αντίστοιχα. Αν $Μ$ το μέσο της βάσης $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΜΔΕ$ είναι ισοσκελές.

Λύση



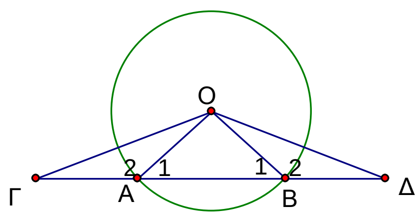
Αρκεί να δειχθεί ότι $ΜΔ = ΜΕ$ ή
αρκεί να δειχθεί ότι τρ. $ΜΔΒ$ = τρ. $ΜΕΓ$

Έχουν
$ΜΒ = ΜΓ$
$\hat{Β} = \hat{Γ}$ προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς
$ΒΔ = ΓΕ$ αθροίσματα ίσων

3.

Δίνεται κύκλος $Ο$ και χορδή του $ΑΒ$. Προεκτείνουμε την $ΑΒ$ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $Ο\hat{Γ}Α = Ο\hat{Δ}Β$.

Λύση



Αρκεί να δειχθεί ότι τρ.$ΟΑΓ$ = τρ.$ΟΒΔ$
Έχουν
$ΟΑ = ΟΒ$ ακτίνες
$ΑΓ = ΒΔ$ υπόθεση
$\hat{Α}_2 = \hat{Β}_2$ παραπληρωματικές των $\hat{Α}_1 = \hat{Β}_1$