

## 2.19

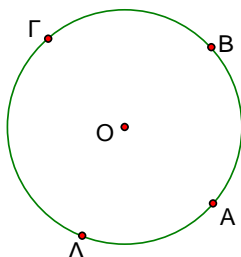
### Ασκήσεις σχ.βιβλίου σελίδας 27 – 28

#### Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα

- i)  $AB + B\Gamma$
- ii)  $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta$
- iii)  $AB\Gamma - B\Gamma$



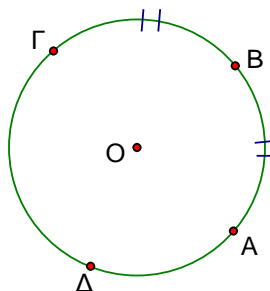
#### Απάντηση

- i)  $AB + B\Gamma = AB\Gamma$
- ii)  $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma\Delta$
- iii)  $AB\Gamma - B\Gamma = AB$

2.

Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα

- i)  $2 AB$
- ii)  $2 AB + \Gamma\Delta$
- iii)  $2 AB - B\Gamma$
- iv)  $AB - B\Gamma$



#### Λύση

- i)  $2 AB = AB + B\Gamma = AB\Gamma$
- ii)  $2 AB + \Gamma\Delta = AB\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma\Delta$
- iii)  $2 AB - B\Gamma = AB\Gamma - B\Gamma = AB$
- iv)  $AB - B\Gamma = AB - AB = 0$

3.

Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός

α. αρνητικός β. μηδέν γ. θετικός δ. μη αρνητικός

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση

δ

μη αρνητικός

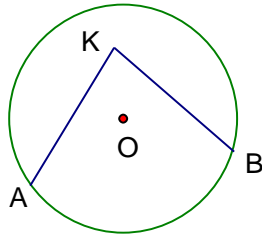
4.

Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας ;

Μέτρο γωνίας λέγεται το μέτρο του αντίστοιχου τόξου, όταν καταστήσουμε τη γωνία επίκεντρη σε κάποιον κύκλο.

5.

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι  $AB = \mu^\circ$ , τότε η γωνία  $\widehat{AKB}$  θα είναι  $\mu^\circ$ ;



Όχι διότι δεν είναι επίκεντρη

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία A, B και σημείο M του τόξου AB, ώστε  $MA = MB$ .

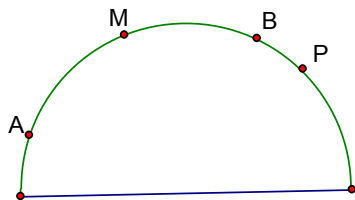
i). Αν P σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο AB, να αποδείξετε ότι

$$PM = \frac{1}{2}(PA + PB).$$

ii). Αν Σ σημείο του τόξου MB, να αποδείξετε ότι  $\Sigma M = \frac{1}{2}(\Sigma A - \Sigma B)$

**Λύση.**

i).



Αρκεί να δειχθεί ότι

$$2 PM = PA + PB$$

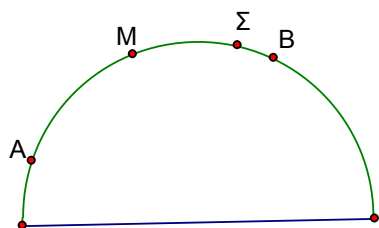
Έχουμε

$$PA = PM + MA \quad (1)$$

$$PB = PM - MB \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow PA + PB = 2 PM$$

ii).



Αρκεί να δειχθεί ότι

$$2 \Sigma M = \Sigma A - \Sigma B$$

Έχουμε

$$\Sigma A = \Sigma M + MA \quad (3)$$

$$\Sigma B = MB - M\Sigma \quad (4)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow \Sigma A - \Sigma B = 2 \Sigma M$$

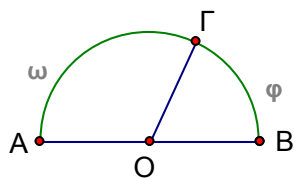
2.

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε  $AG - BG = 80^\circ$ .  
Να βρείτε τα μέτρα:

i) των τόξων AG και GB

ii) των γωνιών  $\widehat{AOG}$  και  $\widehat{GOB}$  (O είναι το κέντρο του κύκλου)

Λύση



i) Έστω  $AG = \omega$  και  $GB = \varphi$

$$\text{Έχουμε } \omega + \varphi = 180^\circ \quad (1)$$

$$\omega - \varphi = 80^\circ \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2\omega = 260^\circ \Rightarrow \omega = 130^\circ$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2\varphi = 100^\circ \Rightarrow \varphi = 50^\circ$$

ii)  $\widehat{AOG} = 130^\circ$  και  $\widehat{GOB} = 50^\circ$

3.

Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.

Λύση

Έστω  $\omega, \varphi$  οι δύο γωνίες.

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 90^\circ \\ \omega = 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi + \varphi = 90^\circ \\ \omega = 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi + \varphi = 90^\circ \\ \omega = 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\varphi = 90^\circ \\ \omega = 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 30^\circ \\ \omega = 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 30^\circ \\ \omega = 60^\circ \end{cases}$$

**4.**

Αν μια γωνία  $\omega$  είναι τα  $\frac{6}{5}$  μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία  $\omega$  έχει συμπληρωματική γωνία;

**Λύση**

$$\omega = \frac{6}{5} \cdot 90^\circ \Rightarrow \omega = \frac{6}{5} \cdot 90^\circ = 6 \cdot 18^\circ = 108^\circ$$

Αν  $\varphi$  η παραπληρωματική της  $\omega$ , τότε  $\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ .

Η  $\omega$  δεν έχει συμπληρωματική, διότι, γεωμετρικά, δεν υπάρχει γωνία η οποία προστιθέμενη με την  $\omega$  να κάνουν άθροισμα  $90^\circ$ , αφού  $\omega > 90^\circ$ .

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

**1.**

Η παραπληρωματική μιας γωνίας  $\omega$  είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της  $\omega$ . Να υπολογίσετε την  $\omega$ .

**Λύση**

$$\begin{aligned} 180^\circ - \omega &= 3(90^\circ - \omega) && \Leftrightarrow && 180^\circ - \omega &= 270^\circ - 3\omega \\ 3\omega - \omega &= 270^\circ - 180^\circ \\ 2\omega &= 90^\circ && \Leftrightarrow && \omega &= 45^\circ \end{aligned}$$

**2.**

Μια γωνία  $\varphi$  είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά  $20^\circ$ . Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.

**Λύση**

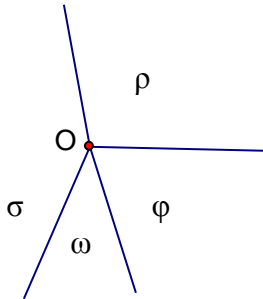
$$\begin{aligned} \text{Θα έχουμε } \varphi + 20^\circ &= 90^\circ - \varphi \\ 2\varphi &= 70^\circ \\ \varphi &= 35^\circ \end{aligned}$$

Η συμπληρωματική της  $\varphi$  θα είναι  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ .

**3.**

Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες  $\widehat{ΑΟΒ}$ ,  $\widehat{ΒΟΓ}$ ,  $\widehat{ΓΟΔ}$ ,  $\widehat{ΔΟΑ}$ , που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.

**Λύση**



$$\frac{\omega}{1} = \frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{3} = \frac{\sigma}{4} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} \omega = \lambda \\ \varphi = 2\lambda \\ \rho = 3\lambda \\ \sigma = 4\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } \omega + \varphi + \rho + \sigma &= 360^\circ \Rightarrow \\ \lambda + 2\lambda + 3\lambda + 4\lambda &= 360^\circ \Rightarrow \\ 10\lambda &= 360^\circ \Rightarrow \\ \lambda &= 36^\circ \end{aligned}$$

Άρα  $\omega = 36^\circ$ ,  $\varphi = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ ,  $\rho = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$ ,  $\sigma = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$ .