

## 2.11 – 2.16

### Ασκήσεις σχ.βιβλίου σελίδας 20 – 21

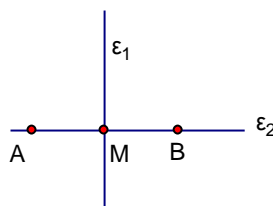
#### Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς

- i) την ευθεία  $\epsilon_1$
- ii) την ευθεία  $\epsilon_2$
- iii) το σημείο M

Αιτιολογήστε την απάντησή σας



#### Απάντηση

- i) Ως προς την ευθεία  $\epsilon_1$  είναι το B, διότι η  $\epsilon_1$  είναι μεσοκάθετος στο τμήμα AB
- ii) Ως προς την ευθεία  $\epsilon_2$  είναι ο εαυτός του αφού βρίσκεται πάνω στην  $\epsilon_2$
- iii) Ως προς το M είναι το B αφού το M μέσο του τμήματος AB

2.

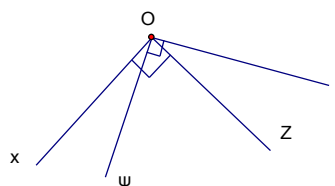
Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.

#### Απάντηση

Οξείες γωνίες είναι οι :  $\angle xO\psi$ ,  $\angle \psi Oz$ ,  $\angle zOt$

Ορθές οι :  $\angle xOz$ ,  $\angle \psi Ot$

Αμβλεία είναι η :  $\angle xOt$



3.

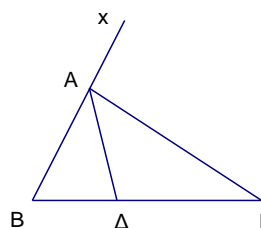
Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.

#### Απάντηση

$\hat{B}\hat{A}$  και  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$

$\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{x}$

$\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{x}$

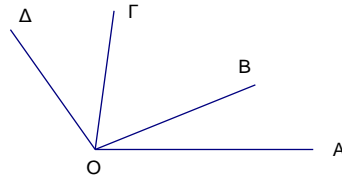


4.

Στο διπλανό σχήμα

- i) Οι γωνίες  $\hat{A}OB$  και  $\hat{G}OD$  είναι εφεξής;
- ii) Οι γωνίες  $\hat{A}OG$  και  $\hat{A}OB$  είναι διαδοχικές;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας



**Απάντηση**

- i) Όχι διότι δεν έχουν κοινή πλευρά
- ii) Όχι διότι δεν είναι εφεξής

5.

Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της ;

**Απάντηση**

Όχι διότι :

αν η γωνία είναι οξεία τότε η συμπληρωματική της θα είναι και αυτή οξεία, ενώ η παραπληρωματική της θα είναι αμβλεία και αν η γωνία είναι αμβλεία δεν θα έχει συμπληρωματική ενώ θα έχει παραπληρωματική

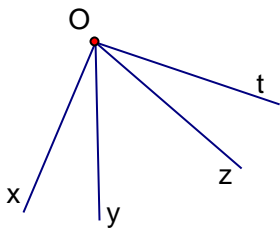
## Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Θεωρούμε τις διαδοχικές γωνίες  $\hat{x}Oy$ ,  $\hat{y}Oz$  και  $\hat{z}Ot$ , ώστε  $\hat{x}Oz = \hat{y}Ot$ .

Να δικαιολογήσετε ότι  $\hat{x}Oy = \hat{z}Ot$ .

**Λύση**



Από τα δύο μέλη της ισότητας  $\hat{x}Oz = \hat{y}Ot$  αφαιρούμε την κοινή γωνία  $\hat{y}Oz$ , οπότε προκύπτει η ισότητα  $\hat{x}Oy = \hat{z}Ot$ .

2.

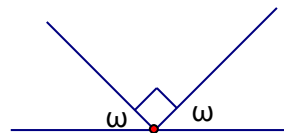
Να υπολογίσετε σε μέρη ορθής, τη γωνία  $\omega$  του παρακάτω σχήματος.

**Λύση**

Είναι  $\omega + 1L + \omega = 2L \Leftrightarrow$

$$2\omega = 1L \Leftrightarrow$$

$$\omega = \frac{1}{2}L$$



### 3.

Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;

#### Λύση

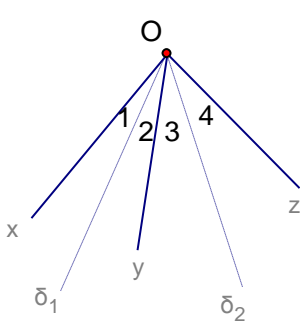
Σχηματίζουν ορθή γωνία.  
Μετά από 6 ώρες, δηλαδή ώρα τρεις.

## Αποδεικτικές ασκήσεις

### 1.

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημίθροισμα των γωνιών αυτών.

#### Λύση



Έστω  $x\hat{O}y$ ,  $y\hat{O}z$  οι δύο εφεξής γωνίες και  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα.

Είναι  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{1}{2} x\hat{O}y$  και  $\hat{O}_3 = \hat{O}_4 = \frac{1}{2} y\hat{O}z$

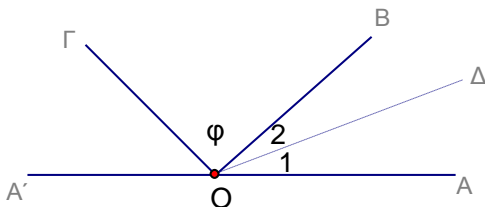
$$\begin{aligned} \delta_1 \hat{O} \delta_2 &= \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \frac{1}{2} x\hat{O}y + \frac{1}{2} y\hat{O}z \\ &= \frac{1}{2} (x\hat{O}y + y\hat{O}z) \end{aligned}$$

### 2.

Θεωρούμε κυρτή γωνία  $A\hat{O}B$ , τη διχοτόμο της  $OD$  και τυχαία ημιευθεία  $OG$  εσωτερική της γωνίας  $A\hat{O}B$ , όπου  $OA'$  η αντικείμενη ημιευθεία της  $OA$ . Να αποδείξετε ότι  $\Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$

$$\text{αποδείξετε ότι } \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$$

#### Λύση



Τα ανεξάρτητα (αυθαίρετα) στοιχεία είναι οι γωνίες  $A\hat{O}B$  και  $B\hat{O}G$ .  
Θέτουμε, λοιπόν  $A\hat{O}B = \omega$ ,  $B\hat{O}G = \varphi$

$$OD \text{ διχοτόμος} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\omega}{2}$$

$$\Gamma\hat{O}\Delta = \varphi + \hat{O}_2 = \varphi + \frac{\omega}{2} = \frac{2\varphi + \omega}{2}$$

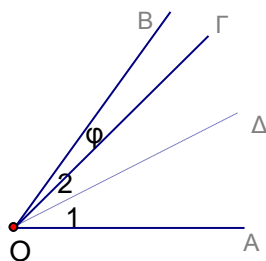
$$\frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2} = \frac{\varphi + \omega + \varphi}{2} = \frac{2\varphi + \omega}{2}$$

$$\text{Άρα } \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$$

### 3.

Θεωρούμε κυρτή γωνία  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ , τη διχοτόμο της  $\hat{O}\hat{\Delta}$  και τυχαία ημιευθεία  $\hat{O}\hat{\Gamma}$  εσωτερική της γωνίας  $\hat{\Delta}\hat{O}\hat{B}$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} = \frac{\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{A} - \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{B}}{2}$

**Λύση**



Τα ανεξάρτητα (αυθαίρετα) στοιχεία είναι οι γωνίες  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$  και  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$ .

Θέτουμε, λοιπόν  $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \omega$ ,  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = \varphi$

$\hat{O}\hat{\Delta}$  διχοτόμος  $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\omega}{2}$

$$\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{O}_2 - \varphi = \frac{\omega}{2} - \varphi = \frac{\omega - 2\varphi}{2}$$

$$\frac{\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{A} - \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}\hat{O}\hat{A} - \varphi - \varphi}{2} = \frac{\omega - \varphi - \varphi}{2} = \frac{\omega - 2\varphi}{2}$$

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} = \frac{\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{A} - \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{B}}{2}$$

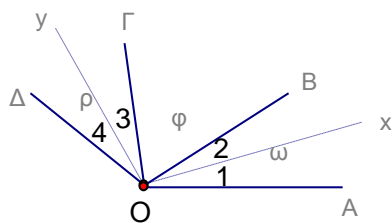
## Σύνθετα Θέματα

### 1.

Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ ,  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$  με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν  $\hat{O}x$ ,  $\hat{O}y$  είναι οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$  αντίστοιχα, να

αποδείξετε ότι  $x\hat{O}y = \frac{\hat{A}\hat{O}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}}{2}$

**Λύση**



Τα ανεξάρτητα (αυθαίρετα) στοιχεία είναι οι γωνίες  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ ,  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$ .

Θέτουμε, λοιπόν

$\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \omega$ ,  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = \varphi$ ,  $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} = \rho$ .

$\hat{O}x$  διχοτόμος  $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\omega}{2}$

$\hat{O}y$  διχοτόμος  $\Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = \frac{\rho}{2}$

$$x\hat{O}y = \hat{O}_2 + \varphi + \hat{O}_3 = \frac{\omega}{2} + \varphi + \frac{\rho}{2} = \frac{\omega + 2\varphi + \rho}{2}$$

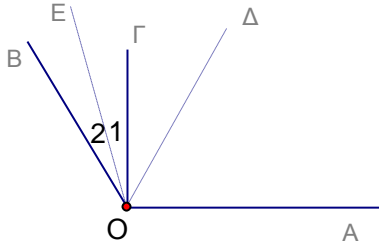
$$\frac{\hat{A}\hat{O}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}\hat{O}\hat{B} + \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\omega + \varphi + \rho + \varphi}{2} = \frac{\omega + 2\varphi + \rho}{2}$$

$$\text{Άρα } x\hat{O}y = \frac{\hat{A}\hat{O}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}}{2}$$

2.

Θεωρούμε αμβλεία γωνία  $\hat{A}OB$  και στο εσωτερικό της την ημιευθεία  $OG \perp OA$ .  
Αν  $OD, OE$  οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}OB$  και  $\hat{B}OG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε  
ότι  $\hat{\Delta}OE = \frac{1}{2} \text{L}$ .

Λύση



Το ανεξάρτητο (αυθαίρετο) στοιχείο είναι  
η γωνία  $\hat{A}OB$ .

Θέτουμε, λοιπόν  $\hat{A}OB = \omega$ .

$$OD \text{ διχοτόμος} \Rightarrow \hat{\Delta}OB = \frac{\omega}{2} \quad (1)$$

$$OG \perp OA \Rightarrow \hat{A}OG = 1\text{L}$$

$$\hat{\Gamma}OB = \hat{A}OB - 1 = \omega - 1$$

$$OE \text{ διχοτόμος} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\hat{\Gamma}OB}{2} = \frac{\omega - 1}{2} \quad (2)$$

$$\hat{\Delta}OE = \hat{\Delta}OB - \hat{O}_2 \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\omega}{2} - \frac{\omega - 1}{2} = \frac{\omega - \omega + 1}{2} = \frac{1}{2} \text{L}.$$