Άσκηση 1η

Έστω σημεία Α,Β,Γ του επιπέδου και Ο σημείο αναφοράς.Αν ισχύει $\left|\vec{ΟΑ}\right|=2$, $\left|\vec{ΟΒ}\right|=2$, $\left|\vec{ΟΓ}\right|=1$ και $\vec{ΟΑ}+4\vec{ΟΒ}-5\vec{ΟΓ}=\vec{0}$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Α=\vec{ΟΑ}.\vec{ΟΒ}+\vec{ΟΑ}.\vec{ΟΓ}+\vec{ΟΒ}.\vec{ΟΓ}$.

iii. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{ΟΑ}$ και $\vec{ΟΓ}$.

iv. Έστω διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν :

$\vec{x}//\left(\vec{ΟΑ}+\vec{ΟΓ}\right)$ και $\left(\vec{x}+\vec{ΟΒ}\right)\perp\left(\vec{ΟΑ}-\vec{ΟΓ}\right)$

Να εκφράσετε το $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{ΟΑ}$ και $\vec{ΟΓ}$ και να βρείτε το $|\vec{x}|$.

Λύση

i. Επειδή Ο σημείο αναφοράς έχουμε:

$$\vec{ΟΑ}+4\vec{ΟΒ}-5\vec{ΟΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΟΑ}-\vec{ΟΓ}+4\vec{ΟΒ}-4\vec{ΟΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΟΑ}-\vec{ΟΓ}+4(\vec{ΟΒ}-\vec{ΟΓ})=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΓΑ}+4\vec{ΓΒ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\vec{ΓΑ}=-4\vec{ΓΒ}$$

Επομένως $\vec{ΓΑ}//\vec{ΓΒ}$ άρα τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

iv. Πρώτα θα υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης $\vec{OA}.\vec{OB}$.Επειδή

$$\vec{OA}+4\vec{OB}-5\vec{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\vec{OA}+4\vec{OB}=5\vec{O\Gamma}\Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{OA}+4\vec{OB}\right)^2=\left(5\vec{O\Gamma}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{OA}\right)^2+8.\vec{OA}.\vec{OB}+\left(4\vec{OB}\right)^2=\left(5\vec{O\Gamma}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\vec{OA}^2+8.\vec{OA}.\vec{OB}+16\vec{OB}^2=25\vec{O\Gamma}^2\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{OA}\right|^2+8.\vec{OA}.\vec{OB}+16\left|\vec{OB}\right|^2=25\left|\vec{O\Gamma}\right|^2\Leftrightarrow$$

$$2^2+8.\vec{OA}.\vec{OB}+16.2^2=25.1^2\Leftrightarrow$$

$$4+8.\vec{OA}.\vec{OB}+64=25\Leftrightarrow$$

$$8.\vec{OA}.\vec{OB}=-43\Leftrightarrow$$

$$\vec{OA}.\vec{OB}=-\frac{43}{8}$$

Δουλεύοντας παρόμοια βρίσκουμε $\vec{OA}.\vec{O\Gamma}=-\frac{35}{10}$, $\vec{OB}.\vec{O\Gamma}=\frac{35}{4}$

Άρα έχουμε $A=\vec{OA}.\vec{OB}+\vec{OA}.\vec{O\Gamma}+\vec{OB}.\vec{O\Gamma}=-\frac{43}{8}-\frac{35}{10}+\frac{35}{4}=\frac{9}{4}$.

.

v. Αν θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{O\Gamma}$ τότε έχουμε:

$$\text{συνθ}=\frac{\vec{OA}.\vec{O\Gamma}}{\left|\vec{OA}\right|.\left|\vec{O\Gamma}\right|}=\frac{\frac{35}{4}}{2.1}=\frac{35}{8}$$

vi. Επειδή το $\vec{x} // \left(\vec{OA}+\vec{O\Gamma}\right)$ τότε είναι $\vec{x}=\lambda.\left(\vec{OA}+\vec{O\Gamma}\right)$. Έτσι έχουμε ,

$$\left(\vec{x}+\vec{OB}\right)\perp\left(\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{x}+\vec{OB}\right).\left(\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\vec{x}.\left(\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right)+\vec{OB}.\vec{OA}-\vec{OB}.\vec{O\Gamma}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda\left(\vec{OA}+\vec{O\Gamma}\right).\left(\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right)+\vec{OB}.\vec{OA}-\vec{OB}.\vec{O\Gamma}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda.\left(\vec{OA}^2-\vec{O\Gamma}^2\right)+\vec{OB}.\vec{OA}-\vec{OB}.\vec{O\Gamma}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda.(4-1)-\frac{43}{8}+\frac{35}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda=-\frac{27}{24}$$

Άρα $\vec{x}=-\frac{27}{24}\vec{OA}-\frac{27}{24}\vec{O\Gamma}$.

vii. Για να βρώ το $\left|\vec{x}\right|$ ξεκινάω από το

$$\left|\vec{x}\right|^2=\left|-\frac{27}{24}\vec{OA}-\frac{27}{24}\vec{O\Gamma}\right|^2=\left|-\frac{27}{24}\right|^2.\left|\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right|^2=\left(\frac{27}{24}\right)^2.\left(\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right)^2=$$

$$\left(\frac{27}{24}\right)^2.\left(\vec{OA}^2-2.\vec{OA}.\vec{O\Gamma}+\vec{O\Gamma}^2\right)=\left(\frac{27}{24}\right)^2.\left(4-2.\left(-\frac{35}{10}\right)+1\right)=$$

$$12.\left(\frac{27}{24}\right)^2$$

Άρα $\left|\vec{x}\right|=\frac{27}{24}\sqrt{12}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$.

Άσκηση 2^{η}

Δίνεται η εξίσωση $x-y-8+\lambda(x-6y-8)=0 \quad \lambda \in \Re$. Να αποδείξετε ότι:

i. Για κάθε $\lambda \in \Re$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία .
ii. Οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.
iii. Η ευθεία (ε): $x+2013\cdot y-8=0$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών.
iv. Υπάρχει μόνο μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας ευθειών , από την οποία η αρχή των αξόνων απέχει 8 μονάδες

<u>Λύση</u>

i.

$$x-y-8+\lambda(x-6y-8)=0 \Leftrightarrow \qquad (1)$$
$$(1+\lambda)x+(-1-6\lambda)y+(-8-8\lambda)=0$$

Για να παριστάνει ευθεία η παραπάνω εξίσωση

Πρέπει να μην είναι ταυτόχρονα μηδέν οι συντελεστές

1+λ , -1-6λ .Αυτό είναι προφανές αφού δεν υπάρχει τιμή

του λ $\in \Re$ ώστε 1+λ = -1-6λ = 0

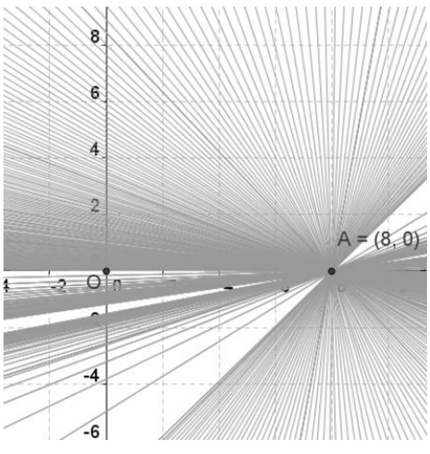
ii. Δίνουμε δύο τιμές για το λ ώστε να βρούμε δύο ευθείες της οικογένειας,

να λύσουμε το σύστημα και να βρούμε το σημείο τομής τους.

Έτσι για λ=0 έχουμε x-y-8=0 και γιαν λ=1 έχουμε x-y-8+x-6y-8=0

$$\begin{cases} x-y=8 \\ 2x-7y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8+y \\ 2(8+y)-7y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8+y \\ 16+2y-7y=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8+y \\ -5y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases}$$



Θα ελέγξουμε αν το σημείο Α(8,0)

επαληθεύει και την οικογένεια ευθειών.

Πράγματι

$$8-0-8+\lambda(8-6\cdot 0-8)=0 \Leftrightarrow \lambda\cdot 0=0$$

Έτσι όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1)

(δηλαδή για κάθε τιμή του λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο το Α.

iii. Η ευθεία (ε): $x+2013\cdot y-8=0$ επαληθεύει το σημείο Α(8,0) αφού

$8+2013\cdot 0-8=0$.

Έτσι διέρχεται από το σημείο Α δηλαδή ανήκει στην οικογένεια ευθειών .

iv. Έστω κ η ζητούμενη ευθεία με (κ): $(1+\lambda)x+(-1-6\lambda)y+(-8-8\lambda)=0$

Θέλουμε να ισχύει $d(\mathrm{O},\kappa)=\dfrac{|(1+\lambda)\cdot 0+(-1-6\lambda)\cdot 0+8(-1-\lambda)|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(-1-6\lambda)^2}}=8$

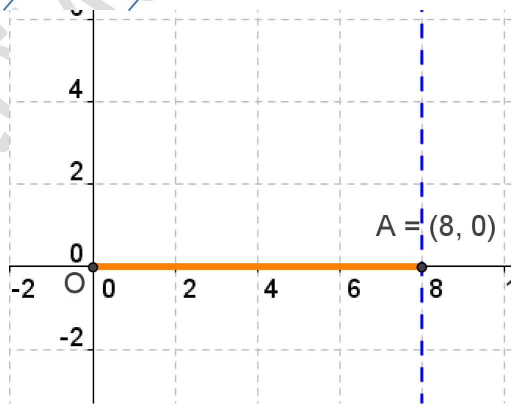
$$\frac{|(1+\lambda)\cdot 0+(-1-6\lambda)\cdot 0+8(-1-\lambda)|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(-1-6\lambda)^2}}=8\Leftrightarrow$$

$$\frac{|-8(1+\lambda)|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(1+6\lambda)^2}}=8\Leftrightarrow \cancel{|8|}\cdot|1+\lambda|=\cancel{8}\cdot\left(\sqrt{(1+\lambda)^2+(1+6\lambda)^2}\right)$$

$$|1+\lambda|^2=\left(\sqrt{(1+\lambda)^2+(1+6\lambda)^2}\right)^2\Leftrightarrow \cancel{(1+\lambda)^2}=\cancel{(1+\lambda)^2}+(1+6\lambda)^2$$

$$(1+6\lambda)^2=0\Leftrightarrow 1+6\lambda=0\Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{6}$$

Πράγματι μία τιμή μόνο για το λ μας δίνει ευθεία που να απέχει από την αρχή των αξόνων 8 μονάδες.



Άσκηση 3η

Δίνεται η εξίσωση της γραμμής (C) : $x^2+y^2-\lambda(x+2y)+\mu-1=0$ με $\lambda,\mu\in\Re^*$

i. Να βρεθούν τα λ,μ ώστε η γραμμή (C) να διέρχεται από την αρχή Ο(0,0) των αξόνων
ii. Για μ=1 να δείξετε πως η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.
iii. Να βρείτε τον Γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.
iv. Να βρεθεί το λ ώστε η ευθεία (ε) : y-x-1=0 να ορίζει χορδή ΑΒ σε έναν από τους παραπάνω κύκλους με $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.
v. Για τον κύκλο που ορίζεται όταν λ=2 να βρείτε τον Γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του που διέρχονται από την αρχή των αξόνων .

Λύση

i. Για να διέρχεται η γραμμή (C) από το σημείο Ο(0,0) πρέπει οι συνταταγμένες του σημείου να επαληθεύουν την εξίσωση της . Έτσι έχουμε

$0^2+0^2-\lambda(0+2\cdot 0)+\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$ και $\lambda\in\Re$

ii. Για μ = 1 η εξίσωση (C) γίνεται :

$x^2+y^2-\lambda x-2\lambda y=0$ με Α = -λ , Β = -2λ , Γ=0

οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(-\lambda)^2+(-2\lambda)^2-4\cdot 0=5\lambda^2>0$

Επομένως η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο με

κέντρο $K\left(\frac{\lambda}{2},\lambda\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{5\lambda^2}}{2}$

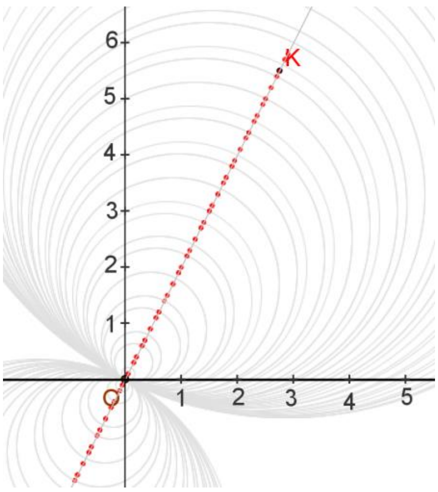
iii. Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι το κέντρο των κύκλων είναι το $K\left(\frac{\lambda}{2},\lambda\right)$. Έτσι έχουμε

$x=\frac{\lambda}{2}$ (1) , $y=\lambda$ (2)

από (1),(2) έχουμε $x=\frac{y}{2}\Leftrightarrow y=2x$

Δηλαδή ο ζητούμενος Γεωμετρικός

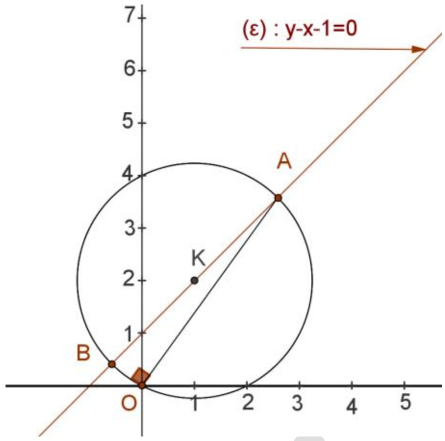
είναι η ευθεία (η): $y=2x$



iv. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB} \Rightarrow A\hat{O}B=90^\circ$

Δηλαδή το O είναι σημείο κύκλου με διάμετρο AB. Έτσι το κέντρο του κύκλου $K\left(\frac{\lambda}{2},\lambda\right)$ θα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας (ε). Έτσι ισχύει

$$\lambda-\frac{\lambda}{2}-1=0 \Rightarrow 2\lambda-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2$$

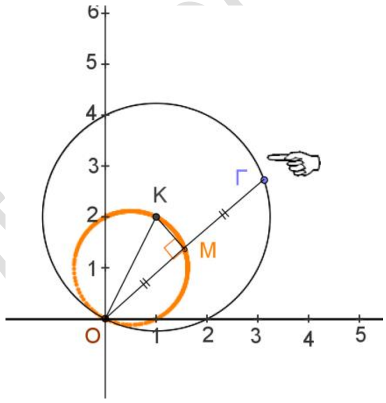


v. Για λ =2 έχουμε τον κύκλο :

$$x^2+y^2-2(x+2y)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y=0$$

με κέντρο $K\left(\frac{\lambda}{2},\lambda\right)$ ή $K(1,2)$

Έστω M(x,y) το μέσο μιας χορδής που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τότε θα ισχύει



$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{MK}$ διότι το KM είναι απόστημα της χορδής.

Επομένως $\overrightarrow{OM}=(x,y)$ και $\overrightarrow{MK}=(1-x,2-y)$

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MK}=0 \Rightarrow (x,y)\cdot(1-x,2-y)=0 \Rightarrow x(1-x)+y(2-y)=0 \Rightarrow$$

$$x-x^2+2y-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-x-2y=0\ ,\ A=-1,\ B=-2,\ \Gamma=0$$

$$K\left(\frac{1}{2},1\right) \text{ και } \rho=\frac{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-4\cdot 0}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

Έτσι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο παραπάνω κύκλος.

Άσκηση 4η

Έστω οι κύκλοι C_1 : $(x-2)^2+y^2 = 4$ και C_2 :$(x+2)^2+y^2=36$

i. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_1 εφάπτεται εσωτερικά του C_2.
ii. Να δείξετε ότι τα κέντρα **Κ** των κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά του C_2 και εξωτερικά του C_1 βρίσκονται πάνω σε έλλειψη .
iii. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης και την εκκεντρότητα της.

Λύση

i. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(2,0)$ και ακτίνα $\rho_1=2$

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2(-2,0)$ και ακτίνα $\rho_2= 6$

Ισχύει όμως $(K_1K_2)=4$ και $\rho_2-\rho_1=6-2=4$ οπότε

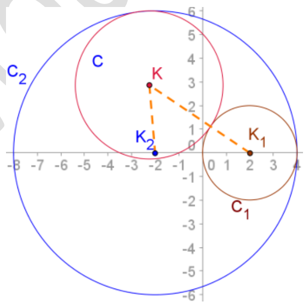
$(K_1K_2) = \rho_2-\rho_1$,δηλαδή ο C_1 εφάπτεται εσωτερικά του C_2 .

ii. Έστω C : (Κ,ρ) ο κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά του C_2 και εξωτερικά του C_1 .

Θα ισχύει τότε $(KK_1)=\rho+\rho_1$ και $(KK_2) =\rho_2-\rho$.

Όμως έχουμε $(KK_1) + (KK_2) = \cancel{\rho}+\rho_1+\rho_2-\cancel{\rho}=2+6=8=2\alpha$

‘Αρα το Κ είναι σημείο έλλειψης με εστίες τα σημεία K_1 , K_2 αφού 2α=8 και $(K_1 K_2) = 4 = 2\gamma$. Δηλαδή ισχύει $2\alpha > 2\gamma$.



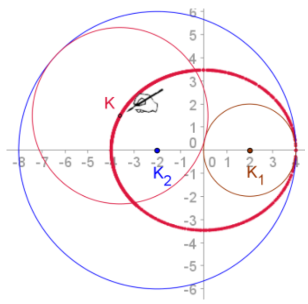
iii.

$$2\gamma=4 \Rightarrow \gamma=2 \text{ και } 2\alpha=8 \Rightarrow \alpha=4$$

$$\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$\text{Έτσι η έλλειψη είναι } \quad C':\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$$

$$\text{και } \ \varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2}{4}$$



Στα παρακάτω links θα βρείτε μικροεφαρμογές (**GeoGebra applets**)* για πιο εύκολη κατανόηση , εμπέδωση και εμβάθυνση των παραπάνω ασκήσεων.

- Άσκηση 2η : **http://www.e-maths.gr/files/Eykl_2.html**
- Άσκηση 3η : **http://www.e-maths.gr/files/eykl_3.html**
- Άσκηση 4η : **http://www.e-maths.gr/files/Eykl_4.html**

* Για να χρησιμοποιήσετε τα Java Applets μπορεί να χρειαστεί να εγκαταστήσετε την τελευταία έκδοση της Java.